

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
СТРОИТЕЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

На правах рукописи



Власов Даниил Александрович

**ОБОСНОВАНИЕ МЕТОДА РАСЧЕТА НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТИ
БУРОНАБИВНЫХ СВАЙ В СКАЛЬНЫХ ГРУНТАХ С УЧЕТОМ ИХ
ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ С ПОРОДНЫМ МАССИВОМ**

2.1.2 – Основания и фундаменты, подземные сооружения

Диссертация
на соискание учёной степени
кандидата технических наук

Научный руководитель:
доктор технических наук, профессор
Зерцалов Михаил Григорьевич

Москва – 2023

ОГЛАВЛЕНИЕ

ОГЛАВЛЕНИЕ	2
ВВЕДЕНИЕ	4
ГЛАВА 1 ОСОБЕННОСТИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ СВАЙ СО СКАЛЬНЫМИ МАССИВАМИ	9
1.1 Механизм работы сваи в скальном грунте	9
1.2 Деформирование трещиноватых скальных массивов	13
1.3 Исследования поведения свай в скальных грунтах	18
1.3 Несущая способность	24
Выводы по главе 1	31
ГЛАВА 2 АНИЗОТРОПНАЯ ДЕФОРМАЦИОННАЯ МОДЕЛЬ СКАЛЬНОЙ ПОРОДЫ С ДИЛАТАНСИЕЙ	32
2.1 Деформационные характеристики скального массива с одной системой плоскопараллельных трещин	33
2.2 Деформационные характеристики скального массива с ортогональной системой трещин	46
2.3 Приведение скального массива с произвольной системой трещин к эквивалентной однородной среде	47
2.4 Сравнение аналитических и численных решений	51
Выводы по главе 2	56
ГЛАВА 3 АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ МОДЕЛЬНОЙ ЗАДАЧИ О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ СВАИ С ОКРУЖАЮЩИМ МАССИВОМ: ПОЛУПЛОСКОСТЬ С ОДНОМЕРНЫМ ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫМ РЕБРОМ ЖЁСТКОСТИ	57
3.1 Постановка задачи	58
3.2 Решение неоднородной задачи для неограниченной плоскости	59
3.3 Решение для неограниченной плоскости с бесконечным ребром жёсткости	63

3.4 Решение для полуплоскости с полубесконечным ребром жёсткости	64
3.5 Преобразование формул при $x = 0$	67
3.6 Асимптотические представления	71
3.7 Сравнение аналитических и численных решений	73
Выводы по главе 3	84
ГЛАВА 4 АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ МОДЕЛЬНОЙ ЗАДАЧИ О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ СВАИ С ОКРУЖАЮЩИМ МАССИВОМ: ПОЛУПЛОСКОСТЬ С ПЕРИОДИЧЕСКИМ НАБОРОМ ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫХ РЁБЕР ЖЁСТКОСТИ.....	85
4.1 Постановка задачи.....	85
4.2 Решение задачи.....	88
4.3 Определение напряжений и перемещений в ребре жёсткости.....	92
4.4 Сравнение аналитических решений с численным. Применение к расчёту единичной сваи.....	93
Выводы по главе 4.....	101
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	102
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	104
ПРИЛОЖЕНИЕ	115

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы исследования. Буронабивные сваи широко используются в качестве фундаментов глубокого заложения при строительстве мостов, портовых сооружений и высотных зданий, обеспечивая поддержку конструкций и передавая большие нагрузки через слои слабых грунтов на более прочные подстилающие скальные породы.

За последние несколько лет подход к проектированию и строительству буронабивных свай в нашей стране был значительно пересмотрен. Рост нагрузок на основание потребовал учёта особенностей структуры и механических свойств скальных оснований, ранее принимаемых в расчётах буронабивных свай как несжимаемые, и поэтому проектируемых исключительно как сваи-стойки.

Сложность определения механических свойств скальных массивов заключается в том, что их прочность и деформируемость в большей степени определяется трещиноватостью, и в меньшей – свойствами ненарушенной породы. Как следствие, определение характеристик скального массива в лабораторных условиях становится невозможным. Вместе с тем и полевые испытания имеют ограничения: испытательное оборудование обычно вовлекает только небольшие объёмы породы, поэтому результаты испытаний не могут быть непосредственно использованы для характеристики крупных участков массива. Таким образом, оценка механических свойств скальных массивов на основе описания трещиноватости (непрямых методов) во многих случаях может дать лучшие результаты, чем результаты натурных измерений.

До сегодняшнего дня при проектировании взаимодействующих со скальным основанием свай нерешённым остаётся вопрос определения напряженно-деформированного состояния. Сваи в скальных грунтах по-прежнему проектируются на основе оценок несущей способности с использованием общих эмпирических подходов, в которых предельное сопротивление под нижним концом и по боковой поверхности связывается с прочностью ненарушенной или ослабленной трещинами скальной породы. Указанные подходы дают весьма

приближенные, характеризующиеся большим разбросом результатов. Кроме того, предложенные методы не позволяют определить напряженно-деформированное состояние, возникающее в породном массиве, что затрудняет рациональное проектирование.

Степень разработанности темы исследования. Вопрос взаимодействия свай со скальным основанием практически не рассмотрен в отечественной научно-технической литературе. Одновременно с этим, несмотря на большой накопленный мировой опыт исследования работы таких свай (Н. Н. Armitage, J. P. Carter, I. Donald, Н. Н. Einstein, S. A. Gill, R. G. Horvath, I. W. Johnston, T. C. Kenney, F. H. Kulhawy, B. Ladanyi, M. W. O'Neill, J. O. Osterberg, P. J. N. Pells, W. A. Prakoso, L. C. Reese, R. K. Rowe, A. Roy, R. M. Turner, A. Williams, L. Zhang и др.), точных решений теории упругости рассматриваемой задачи не предложено.

Учитывая изложенное, **цель исследования** заключается в построении точных решений краевой задачи теории упругости о взаимодействии сваи с породным массивом и разработке аналитического метода определения эффективных деформационных характеристик трещиноватых скальных массивов.

Задачи исследования. В рамках диссертационной работы выполнено:

1. Изучение и анализ существующих подходов к расчёту свай в скальных грунтах на действие осевой сжимающей нагрузки.
2. Изучение массивов скальных пород как объектов природного образования, выделение их специфических особенностей, которые оказывают существенное влияние на работу свай в скальных массивах.
3. Разработка метода определения деформационных характеристик трещиноватых массивов горных пород.
4. Оценка влияния нормальной и сдвиговой жёсткостей трещин на деформационные характеристики скального массива.
5. Построение аналитических решений модельных задач о взаимодействии со скальным грунтом длинной сваи при действии осевой сжимающей нагрузки.

Объектом исследования являются массивы горных пород и буронабивные сваи, взаимодействующие с этими породами. **Предметом исследования** – деформационные свойства трещиноватых скальных массивов и работа буронабивных свай при действии сжимающей нагрузки.

Научная новизна. Построена нелинейная модель деформационной теории пластичности трещиноватых массивов скальных пород с учётом дилатансии. Получены точные аналитические решения задачи о взаимодействии длинных свай со скальным основанием, причём впервые получено аналитическое решение для касательных напряжений на боковой поверхности свай, которое качественно совпадает с экспериментальными исследованиями.

Теоретическая и практическая значимость. Получены аналитические зависимости для определения эффективных деформационных характеристик скальных массивов, рассечённых плоскопараллельной и ортогональной системами трещин. Получены аналитические решения, которые позволяют определить напряженно-деформированное состояние скального массива и взаимодействующей с ним свай. Показано, что использование полученных решений может быть достаточно эффективным для использования в инженерных расчётах.

Методология и методы исследования. Для определения эффективных деформационных характеристик трещиноватых скальных пород предлагается использование параметрического метода асимптотического усреднения дифференциальных уравнений в частных производных, в настоящее время развиваемым А. Н. Власовым, Д. Б. Волковым-Богородским, А. В. Талоновым и др. Скальный массив рассматривается с позиции механики композитных материалов как двухфазная структурно-неоднородную среда, состоящая из ненарушенной скальной породы и нарушений сплошности – трещин. Эффективные свойства, полученные с использованием данного подхода, удовлетворяют принципу эквивалентной гомогенности – энергия деформации эквивалентной (приведённой) среды равна энергии деформации рассматриваемого скального массива. Этот метод

также позволяет дать оценку точности решения краевой задачи уравнений теории упругости.

Далее решается задача о взаимодействии длинной сваи с породным массивом. Рассматриваются две модельные задачи в двумерной постановке: как полуплоскость с одномерным полубесконечным ребром жёсткости-сваей (первая модель) и как полуплоскость с периодическим набором одномерных полубесконечных рёбер жёсткости (вторая модель). В основе решений лежат результаты, полученные, в частности, в работах М. Д. Коваленко, И. В. Меньшовой, Т. Д. Шуляковской, А. П. Кержаева и др.

Важным следствием теории разложений по собственным функциям Папковича – Фадля стала теория остаточных (собственных) напряжений – одна из ключевых проблем механики деформируемого твёрдого тела, имеющая важное значение, в частности, для механики горных пород. В диссертации на основе теории остаточных напряжений построены примеры определения собственных напряжений, обусловленных соединением с прямоугольной пластиной предварительно напряжённого упругого стержня.

Все имеющиеся в настоящее время методы решения такого типа задач теории упругости в областях с сингулярной границей являются приближенными, так как они, так или иначе, сводят бигармоническую проблему к решению бесконечных систем алгебраических уравнений. Точные решения в виде разложений по функциям Папковича – Фадля позволяют не просто получить замкнутые формулы, описывающие решение бигармонической проблемы, но и вскрыть физическую природу описываемых ими явлений.

Положения, выносимые на защиту:

1. Метод определения эффективных деформационных характеристик трещиноватых скальных массивов.
2. Точные решения краевых задач теории упругости о взаимодействии со скальным грунтом длинной сваи при действии осевой сжимающей нагрузки.

Степень достоверности и апробация результатов. Достоверность результатов исследования подтверждена использованием строгих математических моделей, а также путём их сравнения с данными экспериментов, опубликованных в научной литературе, и результатами численного моделирования методом конечных элементов.

Публикации. Материалы диссертации достаточно полно изложены в 9 научных публикациях, из которых 1 работа опубликована в журналах, включённых в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание учёной степени кандидата наук, на соискание учёной степени доктора наук (Перечень рецензируемых научных изданий), и 3 работы опубликованы в журналах, индексируемых в международных реферативных базах Scopus, Web of Science и других.

Структура и объём диссертации. Диссертация состоит из введения, четырёх основных разделов, заключения и приложения. Работа изложена на 123 страницах машинописи и содержит 106 рисунков, 6 таблиц, 110 наименований литературы.

Автор благодарит научного руководителя проф., д.т.н. М. Г. Зерцалова за приобретённые знания и бесценный опыт, полученный в ходе работы над диссертацией, а также д.ф.-м.н. М. Д. Коваленко за неоценимую помощь при решении задач математической физики и д.т.н. А. Н. Власова за консультации по методам усреднения и оценке свойств структурно-неоднородных сред.

ГЛАВА 1 ОСОБЕННОСТИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ СВАЙ СО СКАЛЬНЫМИ МАССИВАМИ

1.1 Механизм работы сваи в скальном грунте

Сжимающая нагрузка, приложенная к голове заглублённой в породу буронабивной сваи, передаётся через (1) касательные напряжения по боковой поверхности сваи на контакте между бетоном и породой, и (2) через нормальные сжимающие напряжения на границе между пятой сваи и подстилающей породой. Поведение сваи под нагрузкой хорошо иллюстрирует рисунок 1.1.

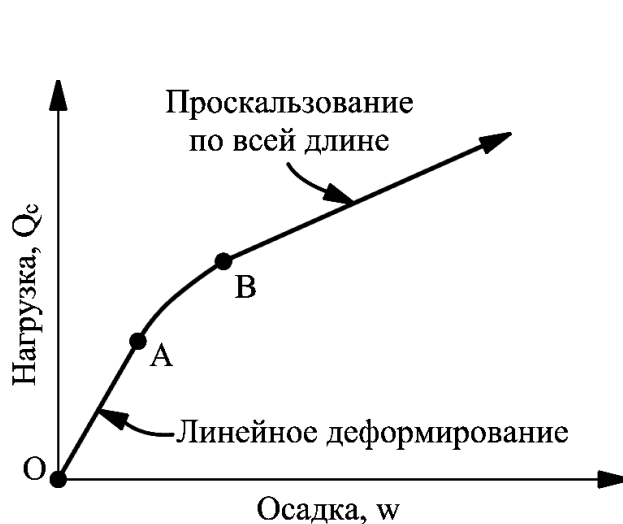


Рисунок 1.1 – Показательная кривая осадки сваи под нагрузкой [Carter, Kulhawy, 1988]

*A – начало разрушение контакта по боковой поверхности сваи,
B – полное разрушение контакта*

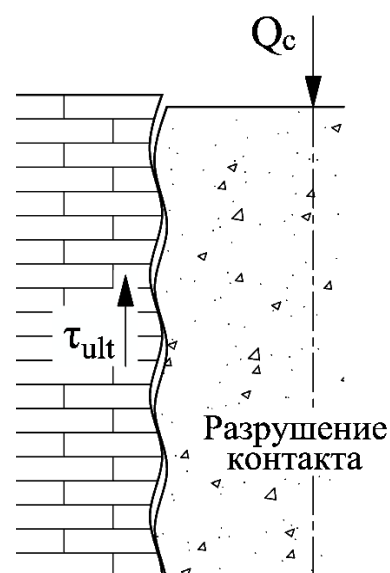


Рисунок 1.2 – Проскальзывание сваи по боковой поверхности

При начальном нагружении начинают развиваться касательные напряжения вдоль боковой поверхности. При относительно малой нагрузке перемещения тоже малы, а связь между напряжением и деформацией по контакту является линейной (линия OA). Проскальзывание между бетонной свайей и вмещающей горной

породой в таком случае отсутствует, и систему можно рассматривать как линейно-упругую. С увеличением нагрузки, вдоль некоторой части боковой поверхности превышает предел прочности на сдвиг, что приводит к разрыву связей по контакту и относительному проскальзыванию сваи. Кривая становится нелинейной по мере разрушения контакта, проскальзывание прогрессирует, и большая часть приложенной нагрузки передаётся на основание (кривая АВ). В какой-то момент реализуется полное боковое сопротивление (за точкой В) и происходит проскальзывание по всей длине (рисунок 1.2), свая начинает работать как свая-стойка. Увеличение нагрузки приводит к разрушению или материала основания, или сваи.

Таким образом, несущая способность сваи, взаимодействующей со скальным грунтом, не может быть подсчитана простым сложением сил предельных сопротивлений грунта по боковой поверхности и под нижним концом: разрушению под нижним концом предшествует разрушение по боковой поверхности. Основными факторами, влияющими на взаимодействие буронабивных свай со скальными грунтами, будут являться: структура скального массива (его трещиноватость), механические характеристики породы и трещин, заглубление и диаметр сваи, её целостность, а также состояние стенок и дна скважины (контакта). От сочетания этих факторов во многом будет зависеть работа сваи.

В случае, когда свая пересекает толщу слабых грунтов и опирается на коренную породу, сопротивлением по боковой поверхности пренебрегают в запас и считают, что вся приложенная нагрузка полностью воспринимается подстилающей породой (рисунок 1.3). Свая в этом случае рассчитывается как свая-стойка.

С увеличением глубины заделки сваи в скальный грунт растёт вклад бокового сопротивления в несущую способность (рисунок 1.4). В прочном скальном массиве, уже при заглублении равном нескольким диаметрам сваи, большая часть приложенной нагрузки воспринимается за счёт сопротивления сдвигу по боковой поверхности (рисунок 1.5). В таком случае свая рассчитывается как висячая, т.е. её

несущая способность определяется как сопротивлением по боковой поверхности, так и прочностью подстилающей породы.

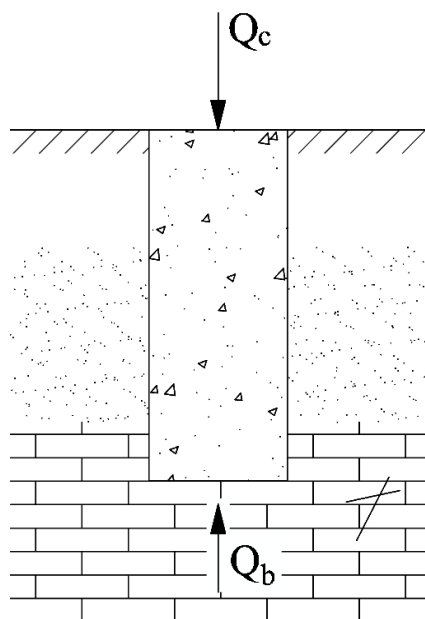


Рисунок 1.3 – Свая-стойка

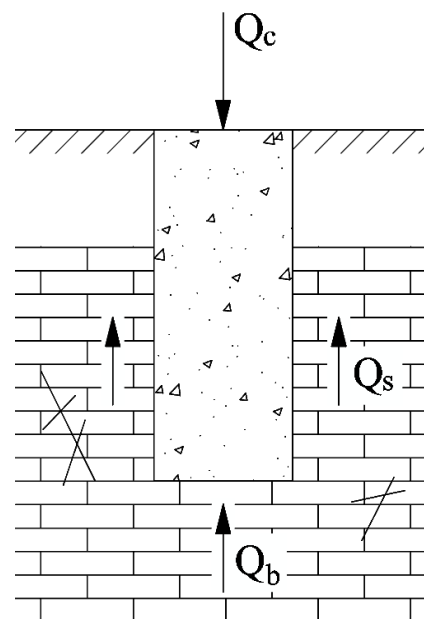


Рисунок 1.4 – Висячая свая.
Совместная работа нижнего конца сваи и боковой поверхности

Разрушение контакта в скальных грунтах может иметь и хрупкий характер. В этом случае происходит внезапное разрушение связей по контакту и значительная потеря несущей способности по боковой поверхности. Определить то, как будет разрушаться контакт до проведения натурных испытаний невозможно. Тогда свая рассчитывается только с учётом сопротивления по боковой поверхности (рисунок 1.6).

Так, например, согласно проведённому опросу представителей транспортного строительства США NCHRP TOPIC 36-12 [NCHRP Synthesis 360, 2006], в десяти штатах, при проектировании свай, нагруженных в осевом направлении, принимают во внимание только боковое сопротивление со скальным основанием.

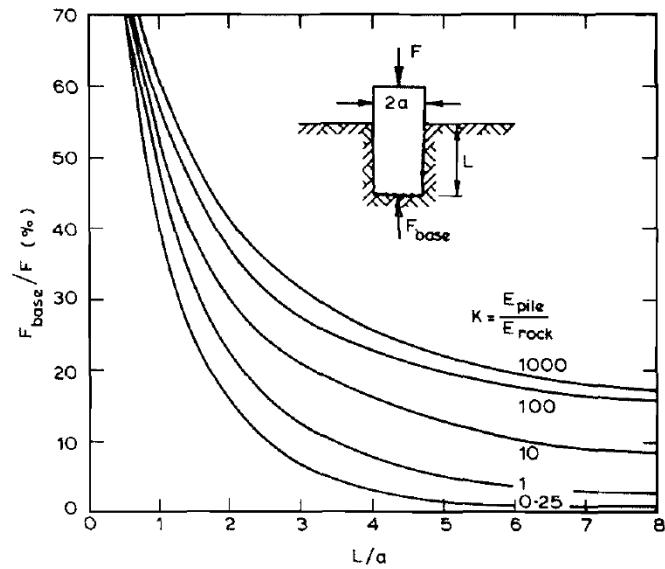


Рисунок 1.5 – Доля полной нагрузки на сваю, воспринимаемая за счёт сопротивления под нижним концом сваи в зависимости от жёсткости основания [Williams, Pells, 1981]

E_{pile} – модуль упругости материала сваи,
 E_{rock} – модуль деформации скального грунта

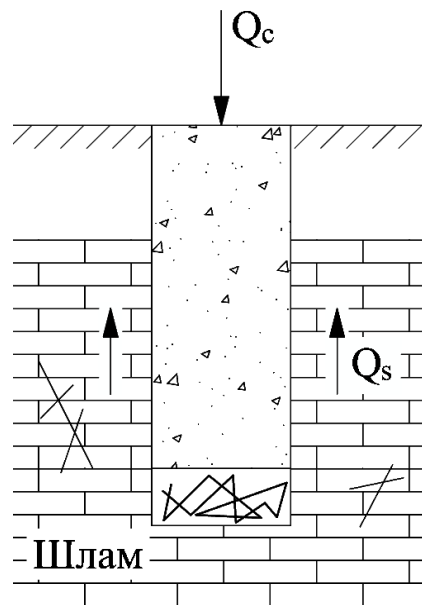


Рисунок 1.6 – Сопротивление по боковой поверхности

1.2 Деформирование трещиноватых скальных массивов

Знание прочностных свойств горной породы необходимо при определении несущей способности свай, а деформационных – для определения осадок и распределения нагрузки по длине свай. Доля нагрузки, передаваемой на основание, будет существенно изменяться в зависимости от жёсткости грунта (рисунок 1.5). При этом трещиноватость массивов приводит к существенному снижению деформационных свойств породы.

В силу того, что определить деформационные свойства трещиноватого скального массива точно невозможно, не существует и единого общепринятого подхода. Основным недостатком натуральных испытаний является сложность вовлечения больших объёмов массива. Технические сложности приложения статических нагрузок ограничивают размеры площади нагружения, поэтому результаты таких испытаний зачастую являются непредставительными, и поэтому не могут быть непосредственно использованы для расчёта. Кроме того, данные натуральных испытаний имеют большой разброс из-за структурной неоднородности скальных массивов, а также из-за конструктивных дефектов загрузочного оборудования, повреждений при подготовке испытательной площадки и т.д. Некоторые характеристики горных пород вообще нельзя получить из опытов, например, модуль сдвига, так как методика их определения совершенно не разработана [Ухов, 1975]. Использование геофизических методов исследования механических свойств массивов также ограничено из-за плохой корреляции между статическими и динамическими характеристиками [Zimmer, 2004].

Из-за ограничений прямых методов испытаний, в инженерной практике получили распространение косвенные методы определения деформационных характеристик скальных массивов: эмпирические и аналитические. Эмпирические методы основаны на классификационных системах, таких как RQD, RMR, GSI, Q и др., в которых деформационные характеристики скальных массивов учтены в неявном виде. Ниже в таблице 1.1 приведены основные эмпирические зависимости для определения модуля деформации скального массива.

Таблица 1.1 – Основные эмпирические зависимости к оценке модуля деформации скального массива

Источник	Зависимость
[Coon, Merritt, 1970]	$E_m / E_r = 0.0231(\text{RQD}) - 1.32$ (1.1)
[Gardner, 1987]	$\begin{cases} E_m = \alpha_E E_r \\ \alpha_E = 0.0231(\text{RQD}) - 1.32 \geq 0.15 \end{cases}$ (1.2)
[Zhang, Einstein, 2004]	$E_m / E_r = 10^{0.0186\text{RQD} - 1.91}$ (1.3)
[Gokceoglu, Sonmez, Kayabasi, 2003]	$E_m = 0.01 \left[\frac{(E_r / R_c)(1 + 0.01\text{RQD})}{\text{WD}} \right]^{1.5528}$ (1.4)
[Bieniawski, 1978]	$E_m = 2\text{RMR}_{76} - 100$ (ГПа) (1.5)
[Serafim, Pereira, 1983]	$E_m = 10^{\frac{(\text{RMR}_{76} - 10)}{40}}$ (ГПа) (1.6)
[Hoek, Brown, 1997]	$E_m = \sqrt{\frac{R_c}{100}} 10^{\frac{(\text{GSI} - 10)}{40}}$ (ГПа) при $R_c < 100$ МПа (1.7)
[Hoek, Diederichs, 2006]	$\frac{E_m}{E_r} = 0.02 + \frac{1 - \frac{D}{2}}{1 + e^{\frac{(60 + 15D - \text{GSI})}{11}}}$ (1.8)
	$E_m = 100 \left(\frac{1 - \frac{D}{2}}{1 + e^{\frac{(75 + 25D - \text{GSI})}{11}}} \right)$ (ГПа) (1.9)
[Barton и др., 1981]	$E_m = 25 \log_{10} Q$ (ГПа) при $Q > 1$ (1.10)
[Barton, 2002]	$E_m = 10 Q_c^{\frac{1}{3}}$, где $Q_c = Q \frac{R_c}{100}$ (1.11)
[Palmström, Singh, 2001]	в интервале $0.1 < \text{RMi} < 1$: $E_m = 5.6 \text{RMi}^{0.375}$ (ГПа) в интервале $1 < \text{RMi} < 30$: $E_m = 7 \text{RMi}^{0.4}$ (ГПа) (1.12)

Примечание: E_r и R_c – модуль деформации и прочность ненарушенной породы, соответственно; E_m – модуль деформации скального массива. Входящие в уравнения классификационные показатели и постоянные определяются согласно работам авторов.

Инженерные классификации скальных массивов являются наиболее простыми при принятии оценочных решений на ранних этапах проектирования, а также при ограниченном наборе результатов инженерных изысканий. Недостатком таких систем является отсутствие теоретического обоснования используемых классификационных признаков, методов построения классификаций, а также неточность исходной информации. В дополнение к указанным недостаткам

инженерных методов оценки модуля деформации скальных массивов следует также отнести неучет такого важного фактора, как масштабный эффект, а также очень часто встречающейся деформационной анизотропии.

Существует небольшое количество исследований, в которых предлагаются регрессионные зависимости к оценке модуля деформации скального массива непосредственно к расчёту свай в скальных грунтах. Так, например, Роу и Армитидж [Rowe, Armitage, 1984] сопоставили модуль деформации E_m , полученный по результатам полевых испытаний свай, заглублённых в слабые скальные породы, со средней прочностью на одноосное сжатие образца скального грунта R_c :

$$E_m = 215\sqrt{R_c} \text{ (МПа)}, \quad (1.13)$$

авторы, однако, отмечают, что данное выражение применимо только к скальным грунтам с сомкнутыми трещинами.

Заметим, что исследования по определению деформационных свойств скальных массивов (как экспериментальных и инженерных, так и строгих математических) основаны на предположении, что скальный массив при описании процесса его деформирования можно представить в виде эквивалентной сплошной среды. Такое представление является основным в геомеханике и позволяет применять хорошо изученные закономерности механики сплошной среды [Вакуленко, Качанов, 1971; Власов, 2010; Гудман, 1987; Руппенейт, 1975; Фильштинский, 1974; Amadei, Savage, 1993; Fossum, 1985; Kulhawy, 1978; Walsh, 1965; Yoshinaka, Yamabe, 1986; Zhang, 2010 и др.].

Также существует и другой, альтернативный подход, где скальный массив рассматривается как дискретная среда. Подробный обзор представлен в работах [Bobet и др., 2009; Jing, 2003; Jing, Hudson, 2002; Jing, Stephansson, 2007; Lisjak, Grasselli, 2014; Yuan, Harrison, 2006]. Такой подход основывается на том, что скальные массивы всегда рассечены трещинами, т.е. его можно представить в виде массива, составленного из блоков ненарушенной структуры. Описание процессов деформирования скальных массивов, где они рассматриваются как дискретные

среды, даёт, как правило, качественную картину деформационного поведения. Чтобы получить количественную картину приемлемой точности недостаточно схематического представления трещиноватости массива, необходимо иметь достаточно точное геометрическое её описание, а это трудоёмкая инженерно-геологическая задача, которая на практике зачастую невыполнимая. Также отметим, что если структуру скального массива удастся с достаточной степенью точности представить в виде блоков, то для решения задач деформируемости требуются более значительные вычислительные мощности, нежели при рассмотрении его как сплошной среды, и при этом точность решения задачи будет сопоставимой.

Таким образом, далее в работе мы будем рассматривать скальный массив как неоднородную сплошную среду (если необходимо, то многосвязную) с последующим её приведением к эквивалентной однородной сплошной среде с соответствующими эффективными деформационными характеристиками.

Использования жёсткостей трещин при определении деформационных характеристик впервые было предложено в работах Дункана и Гудмана [Duncan, Goodman, 1968; Goodman, 1970]. Так как непосредственно определить модули упругости трещин не представляется возможным, использование жёсткостей трещин получило широкое распространение в механике скальных пород. Для определения эффективных характеристик деформационных свойств скального массива, рассечённого одной системой плоскопараллельной трещин, в работе [Гудман, 1987] были получены следующие формулы:

$$\begin{aligned} \frac{1}{E_{\perp}} &= \frac{1}{E_r} + \frac{1}{k_n s}; & E_{\parallel} &\approx E_r; \\ \frac{1}{G_{\perp}} &= \frac{1}{G_r} + \frac{1}{k_s s}; & G_{\parallel} &\approx \frac{E}{2(1+\nu_r)}; \\ \nu_{\parallel, \perp} &= \nu_r; & \nu_{\parallel, \parallel} &= \nu_r, \end{aligned} \quad (1.14)$$

где s – толщина породных слоёв, определяемая расстоянием между трещинами; k_n и k_s – соответственно нормальная и сдвиговая жёсткости трещин, значения

которых определяются опытным путём, как, например, это показано на рисунках 1.7 и 1.8.

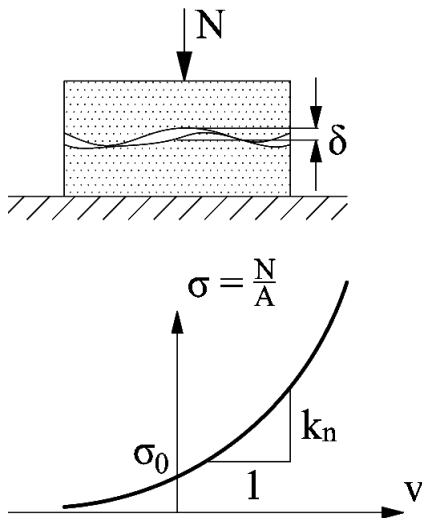


Рисунок 1.7 – Сжатие трещины под действием нормальной нагрузки

δ – раскрытие трещины;
 σ_0 – начальное нормальное напряжение

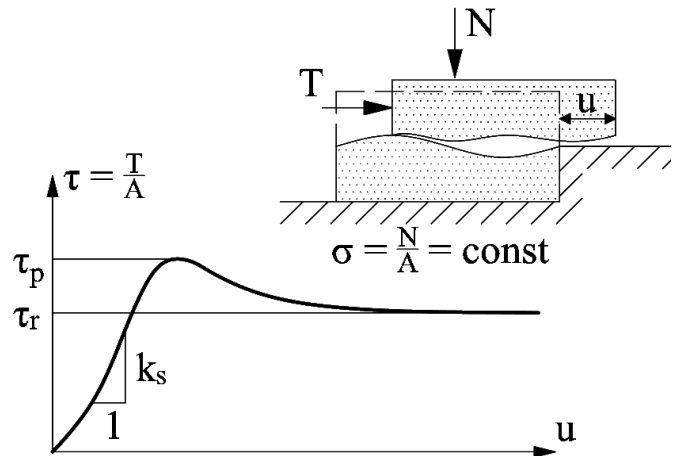


Рисунок 1.8 – Касательное смещение трещины в опытах на прямой сдвиг

τ_p и τ_r – пиковые и остаточные касательные напряжения, соответственно

Формулы (1.14) были получены Гудманом из инженерных соображений, где эффективные деформационные характеристики скального массива, равномерно рассечённого плоскопараллельными трещинами, рассматриваемого как трансверсально изотропная среда, определялись из геометрического сопоставления деформированных блоков «ненарушенная скальная порода – трещина» с эквивалентным сплошным однородным блоком при одноосном нагружении поперёк трещины и сдвиге вдоль трещины, соответственно.

Аналогичные зависимости для случая трещиноватости, представленной одной системой плоскопараллельных трещин, были получены в работах [Власов, 1990; Власов, 2010] с использованием метода асимптотического усреднения Бахвалова, единственного математически строго обоснованного и дающего точные значения эффективных свойств, которые удовлетворяют принципу эквивалентной гомогенности и не могут быть уточнены [Bakhvalov, Panasenko, 1989]. В работе

[Гудман, 1987] нормальная и сдвиговая жёсткости предполагались константами, а в работе [Власов, 2010] они предполагались зависящими от нормального к трещине напряжения и напряжения сдвига вдоль трещины, однако вывод этих зависимостей был в предположении кусочно-постоянной аппроксимации. Отметим также, что метод асимптотического усреднения позволяет получать не только средние значения полей перемещений, деформаций и напряжений, но также и их локальные флуктуации, что очень важно для решения задач прочности.

Дальнейшее развитие метод Бахвалова, но уже для решения нелинейных дифференциальных уравнений с быстро осциллирующими коэффициентами, получил в параметрической форме в работах [Власов, Волков-Богородский, 2014; Vlasov, Volkov-Bogorodsky, 2018].

В дальнейшем в диссертации для определения эффективных деформационных характеристик трещиноватых скальных пород мы будем использовать *параметрический метод асимптотического усреднения*.

1.3 Исследования поведения свай в скальных грунтах

Поведение свай в скальных грунтах под нагрузкой преимущественно изучалось посредством численного анализа [Donald, Sloan, Chiu, 1980; Osterberg, Gill, 1973; Pells, Turner, 1979; Rowe, Armitage, 1987; Zertsalov, Znamenskiy, Khokhlov, 2018 и др.], наряду с ограниченными результатами полномасштабных полевых испытаний свай. Основные положения указанных исследований сводятся к следующему. Массив рассматривается как упругая или упругопластическая изотропная сплошная среда, в центре которого моделируется цилиндрическая свая. На сваю действует вертикальная сжимающая сила, которая считается равномерно распределённой по площади поперечного сечения сваи. В исследованиях [Rowe, Armitage, 1987; Zertsalov, Znamenskiy, Khokhlov, 2018] воспроизводилась также работа контакта со скальным грунтом. На основе результатов строятся диаграммы для определения осадки свай или нагрузки, приходящей на грунт основания. Пример такой диаграммы показан на рисунке 1.9.

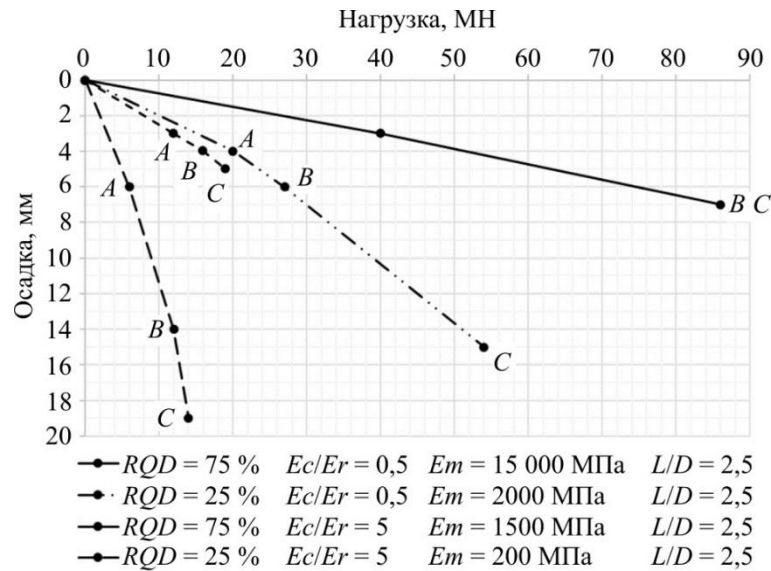


Рисунок 1.9 – Диаграмма к определению осадки сваи, взаимодействующей со скальным грунтом [Zertsalov, Znamenskiy, Khokhlov, 2018]

A и B – точки начала и окончания разрушения контакта со скальным грунтом, C – точка начала разрушения материала сваи или скального массива

При вышеуказанных допущениях, где скальный массив рассматривается как упругая изотропная сплошная среда, можно сделать вывод, что взаимодействие сваи с таким массивом будет аналогично взаимодействию с другими упругими материалами. Следовательно, характер распределения касательных напряжений по боковой поверхности сваи не будет качественно отличаться тех, что были получены поляризационно-оптическим методом в работе [Колесник, 1971] и представлены на рисунке 1.10.

Аналитическим путём задача о взаимодействии сваи со скальным грунтом решалась в работе [Carter, Kulhawy, 1988]. Как и в исследовании [Randolph, Wroth, 1978], для описания упругого деформирования грунта в окрестностях сваи, Кулхэви и Картер рассматривали телескопический механизм коаксиальных породных цилиндров, сдвигающийся один относительно другого (рисунок 1.11).

При осевом нагружении сваи в массиве возникают преимущественно вертикальные перемещения, а нагрузка передаётся от сваи к породному массиву за счёт касательных напряжений, действующих на цилиндрической поверхности, с

небольшим изменением вертикальных напряжений в самом породном массиве (кроме основания сваи).

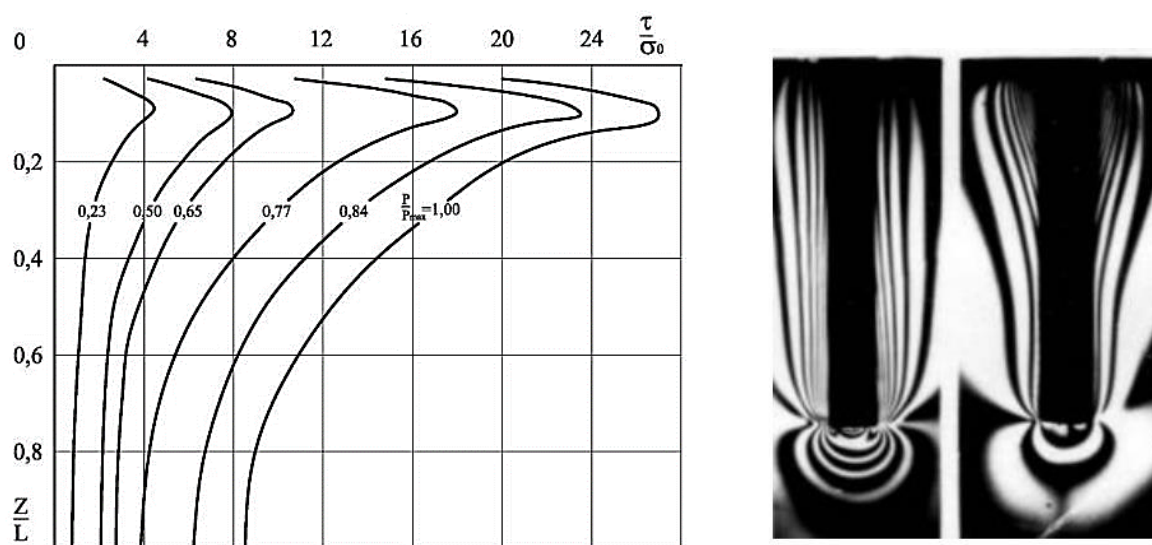


Рисунок 1.10 – Эпюры и изополя касательных напряжений для упругой и жёсткой свай [Колесник, 1971]

а – эпюры касательных напряжений по длине упругой (резиновой) сваи;
б – изополя касательных напряжений для жёсткой (стальной) и упругой свай, полученные поляризационно-оптическим методом

Для такого типа взаимодействия осадка сваи w_c может быть приближённо описана в терминах гиперболических тригонометрических функций глубины z от поверхности:

$$w_c(z) = A_1 \sinh[\mu z] + A_2 \cosh[\mu z]. \quad (1.15)$$

Здесь A_1 и A_2 – постоянные, определяемые из граничных условий; μ определяется из выражения:

$$(\mu L)^2 = \left(\frac{2}{\zeta \lambda} \right) \left(\frac{2L}{B} \right)^2, \quad (1.16)$$

где L – длина сваи; B – диаметр сваи; $\zeta = \ln[5(1-\nu_m)L/B]$; $\lambda = E_c / G_m$; $G_m = E_m / [2(1+\nu_m)]$ – модуль сдвига массива; E_c – модуль упругости сваи; E_m – модуль деформации массива; ν_m – коэффициент Пуассона массива. Значение $\zeta = \ln[5(1-\nu_m)L/B]$ получается из численных решений задачи о гибкой свае.

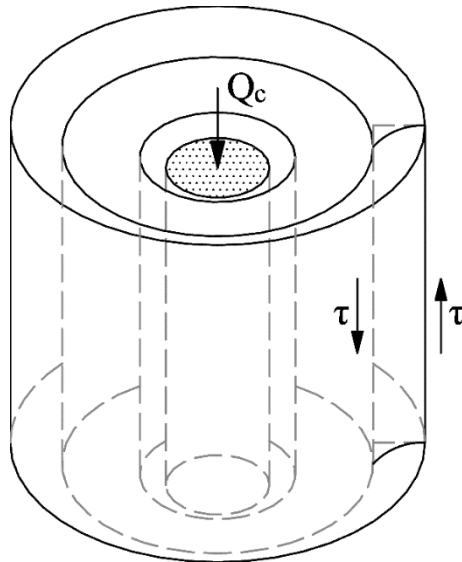


Рисунок 1.11 – Деформирование грунта в окрестностях сваи [Randolph, Wroth, 1978]

Авторы рассмотрели два случая взаимодействия сваи с породным массивом: (1) осадка сваи определяется только за счёт сопротивления сдвигу по боковой поверхности, (2) осадка сваи определяется как за счёт сопротивления по боковой поверхности, так и за счёт сопротивления под нижним концом.

(1) В качестве граничного условия взяты нулевые напряжения под нижним концом сваи. Тогда упругая осадка верха сваи может быть выражена:

$$\frac{E_m B w_c}{2Q_c} = \left(\frac{1}{\pi} \right) \left(\frac{E_m}{E_c} \right) \left(\frac{2}{\mu B} \right) \left(\frac{\cosh[\mu L]}{\sinh[\mu L]} \right). \quad (1.17)$$

(2) Используя стандартные решения контактной задачи о жёстком штампе, вдавливаемого в упругое полупространство с модулем упругости E_b и коэффициентом Пуассона ν_b , в качестве граничного условия под пятой сваи, можно получить упругую осадку верха сваи:

$$\frac{G_m B w_c}{2Q_c} = \frac{1 + \left(\frac{4}{1 - \nu_b} \right) \left(\frac{1}{\pi \lambda \xi} \right) \left(\frac{2L}{B} \right) \left(\frac{\tanh[\mu L]}{\mu L} \right)}{\left(\frac{4}{1 - \nu_b} \right) \left(\frac{1}{\xi} \right) + \left(\frac{2\pi}{\xi} \right) \left(\frac{2L}{B} \right) \left(\frac{\tanh[\mu L]}{\mu L} \right)}, \quad (1.18)$$

где $\xi = \frac{G_m}{G_b}$; $G_b = \frac{E_b}{[2(1 + \nu_b)]}$.

Величина нагрузки, передаваемая на основание сваи Q_b , в этом случае вычисляется как

$$\frac{Q_b}{Q_c} = \frac{\left(\frac{4}{1-\nu_b}\right)\left(\frac{1}{\xi}\right)\left(\frac{1}{\cosh[\mu L]}\right)}{\left(\frac{4}{1-\nu_b}\right)\left(\frac{1}{\xi}\right) + \left(\frac{2\pi}{\xi}\right)\left(\frac{2L}{B}\right)\left(\frac{\tanh[\mu L]}{\mu L}\right)}. \quad (1.19)$$

Далее, авторы рассмотрели случай деформирования сваи с учётом разрушения контакта с породным массивом. Предельное сопротивление сдвигу по всей длине сваи подсчитывалось по критерию Мора – Кулона. Влияние раскрытия контакта (дилатансии) начинается сразу после начала его разрушения. Породный массив считается линейно-упругим даже после полного проскальзывания (точка В на рисунке 1.1), а свая также рассматривается как упругий стержень.

(1) Напряжения под пятой сваи равны нулю, тогда осадка верха сваи равна

$$w_c = F_1 \left(\frac{Q_c}{\pi E_m B} \right) - F_2, \quad (1.20)$$

где $F_1 = a_1(\lambda_2 B C_2 - \lambda_1 B C_1) - 4a_3$; $F_2 = a_2 \left(\frac{c}{E_r} \right)$;

$$C_{1,2} = \frac{\exp[\lambda_{2,1} L]}{(\exp[\lambda_2 L] - \exp[\lambda_1 L])};$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\beta \pm (\beta^2 + 4\alpha)^{0,5}}{2\alpha};$$

$$\alpha = a_1 \left(\frac{E_c}{E_r} \right) \left(\frac{B^2}{4} \right);$$

$$\beta = a_3 \left(\frac{E_c}{E_r} \right) B;$$

$$a_1 = (1 + \nu_r) \zeta + a_2;$$

$$a_2 = \left[(1 - \nu_c) \left(\frac{E_m}{E_c} \right) + (1 + \nu_r) \left(\frac{1}{2 \tan \phi \tan \psi} \right) \right];$$

$$a_3 = \left(\frac{v_c}{2 \tan \psi} \right) \left(\frac{E_m}{E_c} \right).$$

(2) Напряжения под пятой сваи не равны нулю, тогда осадка верха равна

$$w_c = F_3 \left(\frac{Q_c}{\pi E_m B} \right) - F_4 B, \quad (1.21)$$

где $F_3 = a_1 (\lambda_1 B C_3 - \lambda_2 B C_4) - 4a_3$;

$$F_4 = \left[1 - a_1 \left(\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{D_4 - D_3} \right) B \right] a_2 \left(\frac{c}{E_r} \right);$$

$$C_{3,4} = \frac{D_{3,4}}{D_4 - D_3};$$

$$D_{3,4} = \left[\pi (1 - v_b^2) \left(\frac{E_r}{E_b} \right) + 4a_3 + a_1 \lambda_{2,1} B \right] \exp[\lambda_{1,2} L].$$

Величина нагрузки, передаваемой на основание сваи Q_b равна

$$\frac{Q_b}{Q_c} = P_3 + P_4 \frac{\pi B^2 c}{Q_c}, \quad (1.22)$$

где $P_3 = a_1 (\lambda_1 - \lambda_2) B \exp[(\lambda_1 - \lambda_2) L] / (D_4 - D_3)$;

$$P_4 = a_2 (\exp[\lambda_2 D] - \exp[\lambda_1 L]) / (D_4 - D_3).$$

Снижение жёсткости контактной зоны Кулхэви и Картер не рассматривали. Однако проведённые в работе [Зерцалов, 2018] исследования осадок висячих свай от изменения касательной жёсткости контакта показывают, что с уменьшением касательной жёсткости k_s . величина осадок сваи увеличивается до 2 – 3 раз (рисунок 1.12) в зависимости от значений модуля деформации скального массива, с увеличением которого происходит заметное уменьшение значений осадок.

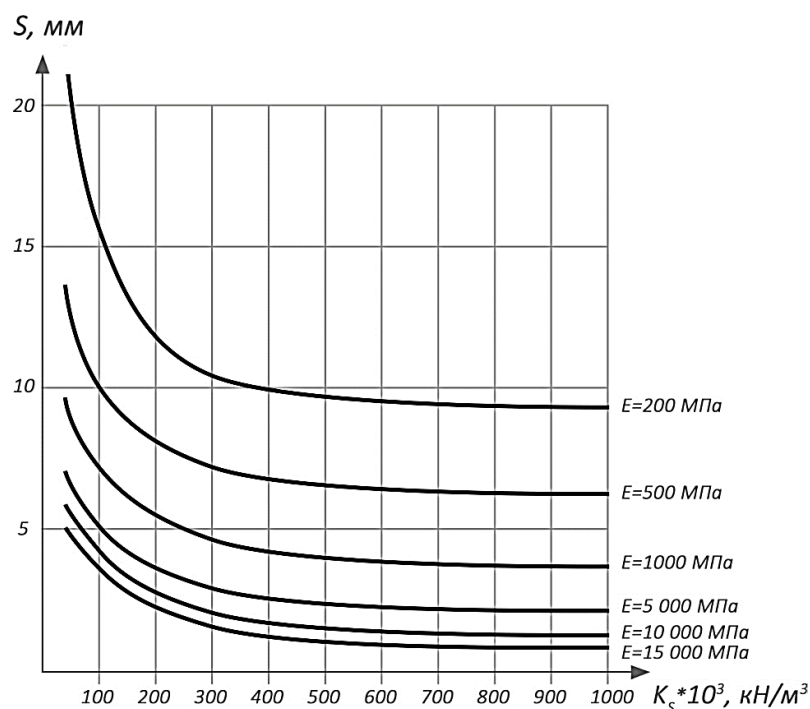


Рисунок 1.12 – Кривые зависимости осадок свай от изменения касательной жёсткости контакта при различных отношениях модуля упругости свай к модулю деформации массива E_c / E_m [Зерцалов, 2018]

1.3 Несущая способность

Наиболее часто измеряемой характеристикой скальных грунтов, а в отдельных случаях единственной доступной на этапах предварительного и вариантного проектирования, является прочность на одноосное сжатие скального грунта в образце R_c (прочность ненарушенной породы). Поэтому при отсутствии полномасштабных натуральных испытаний свайных фундаментов в скальных грунтах, в различных странах, широко используются эмпирические зависимости, в которых предельное сопротивление под нижним концом свай R и предельное сопротивление по боковой поверхности R_s связаны с прочностью ненарушенной породы R_c .

В зарубежной литературе для подсчёта предельного сопротивления по боковой поверхности R_s встречаются общие по своему виду зависимости, которые можно обобщить как

$$R_s = c(R_c)^n \quad (1.23)$$

или в безразмерном виде

$$\frac{R_s}{P_a} = C \left(\frac{R_c}{P_a} \right)^n, \quad (1.24)$$

где C и n – некие эмпирические постоянные, p_a – атмосферное давление в тех же единицах.

Надо полагать, наиболее систематичный анализ опубликованных данных нагрузочных испытаний свай и ранее проведённых исследований несущей способности изложен в статье [Kulhawy, Prakoso, Akbas, 2005] и представлен в виде таблицы 1.2.

Таблица 1.2 – К оценке бокового сопротивления

Источник	Рекомендованные постоянные к зависимости (1.24)	
	C	n
[Rosenberg, Journeaux, 1976]	1.09	0.52
[Horvath, 1978]	1.04	0.5
[Horvath, Kenney, 1979]	0.65	0.5
[Meigh, Wolski, 1981]	0.55	0.6
[Williams, Johnston, Donald, 1981]	1.84	0.37
[Rowe, Armitage, 1984]	1.42	0.5
[Carter, Kulhawy, 1988]	0.63	0.5
[O'Neil, Reese, 1999]	0.65	0.5
[Kulhawy, Phoon, 1993]	1.42	0.5
[Zhang, Einstein, 1999]	0.63	0.5
[Prakoso, 2002]	1.74	0.65
[Kulhawy, Prakoso, Akbas, 2005]	1.0	0.5
СП 24.13330 «Свайные фундаменты»	0.63	0.5

Сравнение зависимостей показывает большой разброс значений сопротивления сваи по боковой поверхности при одних и тех же величинах прочности на сжатие ненарушенной породы. В действительности же предельное сопротивление зависит от многих факторов. Вместе с тем, испытания свай проводились на разных опытных площадках, характеризующихся как различными инженерно-геологическими условиями, так и различными условиями проведения испытаний и интерпретацией полученных данных. В работе [Hirany, Kulhawy, 2002] описывается по меньшей мере 40 различных подходов к определению несущей способности сваи, в том числе в ряде испытаний за несущую способность принимается предельная осадка головы или пяты сваи.

В работе [Kulhawy, Prakoso, Akbas, 2005] в анализ были включены только результаты нагрузочных испытаний свай, в которых те были доведены до разрушения. За несущую способность была принята нагрузка, соответствующая точке В на рисунке 1.1. В этом случае лучшее соответствие достигается при

$$\frac{R_s}{p_a} = 1.0 \left(\frac{R_c}{p_a} \right)^{0.5}. \quad (1.25)$$

Зависимость (1.25) рекомендована к использованию в Американском руководстве по проектированию дорожно-транспортных объектов AASHTO LRFD Bridge Design Specifications (8-е издание, 2017) для определения бокового сопротивления свай с естественной шероховатостью стенок.

Поскольку боковое сопротивление увеличивается с ростом шероховатости стенок, скважины с более высокой шероховатостью контакта передают бóльшую часть нагрузки через боковое сопротивление, чем скважины с гладкими стенками.

В работе [Rowe, Armitage, 1987] были предложены следующие значения коэффициентов C для разных уровней шероховатости стенок скважины (см. таблицу 1.3). Для первых трёх уровней коэффициент $C = 1.4$ и для последнего, четвёртого, $C = 1.9$. Значение n во всех случаях принимается 0.5.

Таблица 1.3 – Классификация шероховатости стенок скважины

Класс шероховатости	Описание
R1	Скважина с естественной или искусственной шероховатостью; высота выступов менее 1 мм
R2	Высота выступов 1 – 4 мм, ширина >2 мм, разнесённость 50 – 200 мм
R3	Высота выступов 4 – 10 мм, ширина >5 мм, разнесённость 50 – 200 мм
R4	Высота выступов >10 мм, ширина >10 мм, разнесённость 50 – 200 мм

Регрессионный анализ, проведённый в работе [Kulhawy, Prakoso, 2008], также предлагает среднее значение $C = 1.9$ для шероховатых стенок скважин. Авторы настоятельно рекомендуют руководствоваться местным опытом строительства или проводить натурные испытания свай для определения $C > 1.0$. Однако преимущества достижения более высокого бокового сопротивления за счёт придания шероховатости стенкам скважины часто оправдывают затраты на нагрузочные испытания.

При бурении неустойчивого трещиноватого массива AASHTO LRFD Bridge Design Specifications (8-е издание, 2017) рекомендует следующее выражение:

$$\frac{R_s}{P_a} = 0.65\alpha_E \left(\frac{R_c}{P_a} \right)^{0.5}, \quad (1.26)$$

где α_E определяется по таблице 1.4 в зависимости от степени трещиноватости массива и состояния трещин.

Таблица 1.4 – К определению коэффициента α_E [O'Neil, Reese, 1999]

Показатель качества породы RQD, %	Поправочный коэффициент на трещиноватость α_E (Joint Modification Factor)	
	Сомкнутые трещины	Открытые или заполненные трещины
100	1.00	0.85
70	0.85	0.55
50	0.60	0.55
30	0.50	0.5
20	0.45	0.45

Примечание: RQD (Rock Quality Designation, он же – показатель качества породы) определяется как отношение (в процентах) общей длины сохранённых кусков керна более 10 см к длине пробурённого интервала в скважине.

Предельное сопротивление под нижним концом сваи R может быть оценено следующим образом.

(1) Свая опирается на слаботрещиноватую породу, тогда

$$R = 2.5R_c \text{ [Prakoso, Kulhawy, 2002]}. \quad (1.27)$$

(2) Грунт основания представлен сильнотрещиноватой породой, тогда

$$R = A + R_c \left[m_b \left(\frac{A}{R_c} \right) + s \right]^a \text{ [Turner, Ramey, 2010]}, \quad (1.28)$$

где $A = \sigma'_{vb} + R_c \left[m_b \left(\frac{\sigma'_{vb}}{R_c} \right) + s \right]^a$; s , a и m_b – эмпирические параметры критерия

прочности Хука – Брауна [Ноек, Brown, 1997]; σ'_{vb} – эффективное вертикальное напряжение в уровне пяты сваи. Значение принятого расчётного сопротивления не должно превышать значения, определённого по (1.27). Отметим, что использование модели прочности скального грунта Хука – Брауна возможно только при соблюдении критерия квазисплошности, иными словами, прочность которого не определяется сдвигом по отдельным трещинам.

В Канадском руководстве по расчёту и проектированию искусственных оснований Canadian Foundation Engineering Manual (4-е издание, 2006) рекомендована следующая зависимость:

$$R = 3R_c K_{sp} d \text{ [Ladanyi, Roy, 1971]}, \quad (1.29)$$

$$\text{где } K_{sp} = \frac{3 + \frac{s_v}{B}}{10 \sqrt{1 + 300 \frac{t_d}{s_v}}}; \quad d = 1 + 0,4 \frac{D_s}{B} \leq 3,4.$$

Здесь s_v – расстояние между трещинами; t_d – ширина раскрытия трещин; B – диаметр сваи, D_s – глубина заделки сваи в скальный грунт.

Зависимость (1.29) применима для оценки предельного сопротивления под нижним концом сваи в осадочных горных грунтах с преимущественно горизонтальной трещиноватостью, при которой расстояние между трещинами не менее 0.3 м, а ширина раскрытия трещин не превышает 6 мм.

В нашей стране принят близкий подход к определению несущей способности свай, заделанных в невыветрелый скальный грунт не менее чем на полметра. В соответствии с СП 24.13330.2021 «Свайные фундаменты», сопротивление скального грунта R определяется по формуле:

$$R = R_m \left(1 + 0,4 \frac{D_s}{B} \right), \quad (1.30)$$

где R_m – расчётное значение предела прочности на одноосное сжатие массива в водонасыщенном состоянии, кПа.

Для оценочных расчётов, значение R_m допускается принимать на основании результатов лабораторных испытаний ненарушенных образцов скального грунта R_c по формуле:

$$R_m = \frac{R_c}{\gamma_g} K_s, \quad (1.31)$$

где γ_g – коэффициент надёжности по грунту, принимаемый равным 1.4; K_s – коэффициент снижения прочности, определяемый величиной показателя качества

породы RQD по таблице 1.5. Значение принятого расчётного сопротивления не должно превышать 20 000 кПа.

Таблица 1.5 – К определению коэффициента снижения прочности K_s

Показатель качества породы RQD, %	Коэффициент снижения прочности K_s
90 – 100	1
75 – 90	0.60 – 1
50 – 75	0.32 – 0.60
25 – 50	0.15 – 0.32
0 – 25	0.05 – 0.15

Для расчёта свай, передающих нагрузку на основание через боковую поверхность и нижний конец, в силу отсутствия надёжных расчётных методов, нормами рекомендуется использование численных методов. По результатам моделирования определяется доля от общей нагрузки, воспринимаемая пятой, и доля, воспринимаемая боковой поверхностью свай.

Необходимо ещё раз отметить, что использование представленных выше регрессионных зависимостей возможно только при условии, что дно скважины может быть хорошо очищено от остатков бурения и для контакта с породой не свойственно хрупкое разрушение. В противном случае, целесообразно несущую способность определять только с учётом сопротивления по боковой поверхности. Поэтому исследование работы таких свай стоит считать приоритетным.

Выводы по главе 1

1. До сегодняшнего дня при проектировании свай, взаимодействующих со скальным основанием, нерешённым остаётся вопрос определения напряженно-деформированного состояния. Обзор научно-технической и нормативной литературы показывает, что не существует единого подхода к расчёту несущей способности таких свай, также так и универсального метода определения механических характеристик трещиноватых скальных массивов, что вносит большую неопределённость при проектировании.

2. Сваи в скальных грунтах по-прежнему проектируются на основе оценок несущей способности с использованием общих эмпирических подходов, в которых предельное сопротивление под нижним концом и по боковой поверхности связывается с прочностью ненарушенной или ослабленной трещинами скальной породы. Указанные методы дают весьма приближенные, характеризующиеся большим разбросом результаты. Задача усложняется ещё тем, что точных решений теории упругости для рассматриваемой задачи не предложено.

3. Для решения задачи определения деформационных свойств скального массива предлагается использование параметрического метода асимптотического усреднения дифференциальных уравнений. Эффективные характеристики, полученные с использованием данного метода, позволяют решить задачу определения напряженно-деформированного состояния с достаточной для практических задач степенью точности. Преимущество этого метода перед остальными аналитическими и инженерными методами состоит в том, что это единственный математически строго обоснованный метод определения эффективных свойств структурно неоднородных сред (включая грунты и скальные массивы).

4. Таким образом, *цель исследования* заключается в построении точных решений краевой задачи теории упругости о взаимодействии сваи с породным массивом и разработки аналитического метода определения зависящих от вида напряженного состояния эффективных деформационных характеристик трещиноватых скальных массивов.

ГЛАВА 2 АНИЗОТРОПНАЯ ДЕФОРМАЦИОННАЯ МОДЕЛЬ СКАЛЬНОЙ ПОРОДЫ С ДИЛАТАНСИЕЙ

Данная глава посвящена решению проблемы приведения трещиноватого скального массива к однородной анизотропной среде с эффективными деформационными характеристиками. Для решения этой задачи был использован параметрический метод асимптотического усреднения дифференциальных уравнений с быстро осциллирующими коэффициентами [Власов, Волков-Богородский, 2014; Vlasov, Volkov-Bogorodsky, 2018], являющийся обобщением метода Н. С. Бахвалова [Bakhvalov, Panasenko, 1989]. Выбор по использованию этих зависимостей определялся тем, что метод асимптотического усреднения – это единственный метод оценки свойств структурно неоднородных сред (в том числе грунтов и горных пород), который имеет строгое математическое обоснование и позволяет получать нелинейные эффективные деформационные характеристики массива в зависимости от напряженно-деформированного состояния (НДС), где нормальная и сдвиговая жёсткости трещин являются функциями НДС. Он также позволяет корректировать усреднённые поля напряжений и деформаций, учитывая структуру трещиноватости скального массива, а также позволяет дать оценку получаемых решений при использовании эффективных характеристик, чего недоступно ни одному другому из известных в настоящее время методов. Определённые таким образом эффективные характеристики позволяют решать задачу оценки напряженно-деформированного состояния с достаточной для практических целей точностью.

Прочность и деформируемость трещиноватых скальных массивов зависит от степени расчленённости массива трещинами, ориентации трещин, их шероховатости, характеристик материала заполнителя, механических свойств (деформационных и прочностных) скальных отдельностей и др.

Основной задачей параметрического метода является задача на ячейке, из решения которой определяется полный набор деформационных характеристик трещиноватого скального массива. Отсутствие периодической структуры

трещиноватости не является ограничением на применимость метода к оценке свойств трещиноватого скального массива, т. к. за ячейку периодичности в этом случае следует принимать представительный элемент объёма. Единственное условие, которое должно выполняться – это условие стохастической однородности распределения трещин в массиве. Если это условие не выполняется, то определить эффективные свойства такого массива принципиально невозможно, т.к. они не существуют. Строгое математическое обоснование дано в работах С. М. Козлова [Козлов, 1978а; Козлов, 1978b; Козлов, 1980]. Отметим, что в задаче на ячейке трещины моделировались тонким слоем анизотропного материала, характеристики которого определяются нормальной и сдвиговой жёсткостями, коэффициентом дилатансии и шириной раскрытия трещины. В рамках данного подхода были получены простые аналитические зависимости для определения эффективных деформационных характеристик скального массива, рассечённого плоскопараллельной системой трещин, а также с учётом малости меры области пересечения трещин, были получены аналитические зависимости для определения эффективных деформационных характеристик скального массива, рассечённого ортогональной системой трещин.

Основное содержание главы обсуждается в работах [Власов, Зерцалов, Власов, 2018; Власов, Зерцалов, Власов, 2019; Vlasov, Zertsalov, Vlasov, 2019; Vlasov, Zertsalov, Vlasov, 2020; Zertsalov, Vlasov, Minin, 2020].

2.1 Деформационные характеристики скального массива с одной системой плоскопараллельных трещин

Рассмотрим скальный массив, равномерно рассечённый одной системой плоскопараллельных трещин. При этом трещины могут быть как зияющими, так и с заполнителем, который либо частично заполняет трещины, либо полностью. Случай залеченных трещин здесь не рассматривается. Стенки зияющих трещин, трещин с частичным заполнением, а также с рыхлым заполнителем в массивах скальных пород смыкаются в отдельных точках – скальных контактах. Типовой элемент структуры такого массива показан на рисунке 2.1.

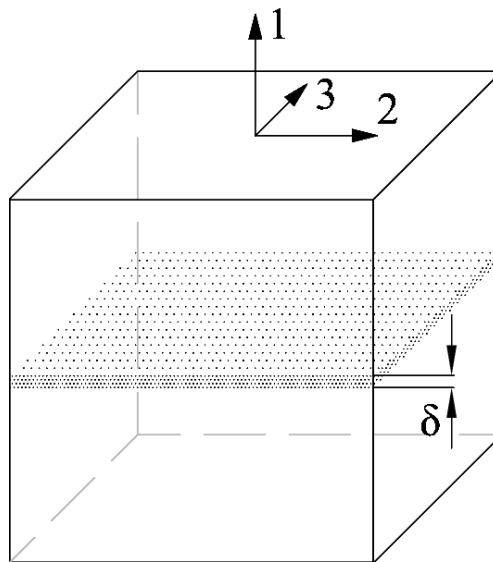


Рисунок 2.1 – Типовой элемент скальной породы, рассечённый трещиной
[Власов, 2010]

По аналогии с работой [Власов, 2010] будем предполагать, что скальные отдельности, которые представляют собой слои ненарушенной скальной породы между трещинами, однородные изотропные с модулем деформации E_r и коэффициентом Пуассона ν_r , а трещины моделируются слоем анизотропного материала. Деформационные характеристики слоя трещины обозначим следующим образом: $E_1^T = E_T$ – модуль деформации в направлении оси 1 ортогональной плоскости трещины; E_2^T и E_3^T – модули деформации в плоскости простираения трещины в направлениях осей 2 и 3, соответственно; G_{12}^T , G_{13}^T , G_{23}^T – модули сдвига в плоскостях 1–2, 1–3 и 2–3, соответственно; ν_{12}^T , ν_{13}^T и ν_{23}^T – коэффициенты Пуассона, характеризующие поперечную деформацию в направлении оси по второму индексу при действии нагрузки в направлении оси по первому индексу. Предположим, что у анизотропного материала, моделирующего трещину, отличны от нуля коэффициенты влияния первого рода $\eta_{12,1}^T$, $\eta_{13,1}^T$, которые характеризуют удлинения в направлении оси 1, вызванные касательными напряжениями τ_{12} и τ_{13} , соответственно, а также коэффициенты влияния второго рода $\eta_{1,12}^T$, $\eta_{1,13}^T$, которые характеризуют сдвиги в

плоскостях 1–2 и 1–3, вызванные нормальным напряжением σ_1 . Отличными от нуля в такой модели трещины также могут быть и коэффициенты Ченцова $\mu_{12,13}^T$ и $\mu_{13,12}^T$, характеризующие сдвиги в плоскостях 1–2, 1–3 и вызванные касательными напряжениями в плоскостях 1–3 и 1–2, соответственно [Лехницкий, 1977].

При принятых обозначениях матрица тензора податливости трещины будет иметь следующий вид:

$$T = \begin{pmatrix} 1/E_T & -v_{21}^T/E_T & -v_{31}^T/E_T & \eta_{12,1}^T/E_T & \eta_{13,1}^T/E_T & 0 \\ -v_{21}^T/E_T & 1/E_2^T & -v_{32}^T/E_2^T & 0 & 0 & 0 \\ -v_{31}^T/E_T & -v_{23}^T/E_3^T & 1/E_3^T & 0 & 0 & 0 \\ \eta_{1,12}^T/G_{12}^T & 0 & 0 & 1/G_{12}^T & \mu_{12,13}^T/G_{13}^T & 0 \\ \eta_{1,13}^T/G_{13}^T & 0 & 0 & \mu_{13,12}^T/G_{12}^T & 1/G_{13}^T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{23}^T \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

Далее будем полагать, что коэффициенты Пуассона и модули сдвига анизотропного материала моделирующего трещину удовлетворяют условиям $\nu_{12}^T = \nu_{13}^T$, $\nu_{21}^T = \nu_{31}^T$, $\nu_{23}^T = \nu_{32}^T$ и $G_{12}^T = G_{13}^T$, а коэффициенты влияния второго рода и коэффициенты Ченцова условиям $\eta_{12,1}^T = \eta_{13,1}^T$, $\eta_{1,12}^T = \eta_{1,13}^T$ и $\mu_{12,13}^T = \mu_{13,12}^T = 0$. Эти условия представляются естественными при деформировании в плоскости трещин и реализуются, например, в случае, когда скальные контакты расположены хаотически, случайным образом. Из условия симметрии тензора податливости следует равенство $\nu_{32}^T/E_2^T = \nu_{23}^T/E_3^T$, из которого, в свою очередь, следует, что $E_2^T = E_3^T$. Введём обозначение $E_2^T = E_3^T = E_0$, тогда матрицу (2.1) можно переписать в виде:

$$T = \begin{pmatrix} 1/E_T & -v_{21}^T/E_T & -v_{21}^T/E_T & \eta_{12,1}^T/E_T & \eta_{12,1}^T/E_T & 0 \\ -v_{21}^T/E_T & 1/E_0 & -v_{32}^T/E_0 & 0 & 0 & 0 \\ -v_{21}^T/E_T & -v_{32}^T/E_0 & 1/E_0 & 0 & 0 & 0 \\ \eta_{1,12}^T/G_{12}^T & 0 & 0 & 1/G_{12}^T & 0 & 0 \\ \eta_{1,12}^T/G_{12}^T & 0 & 0 & 0 & 1/G_{12}^T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{23}^T \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

Пренебрегая влиянием продольного деформирования трещины на напряжённо-деформированное состояние трещиноватой породы, можно принять, что коэффициенты Пуассона $\nu_{23}^T = \nu_{32}^T = 0$. Если же рассматривать зияющие трещины, трещины с частичным заполнением или рыхлым заполнителем, то можно полагать, что ещё и коэффициенты Пуассона $\nu_{21}^T = \nu_{31}^T = \nu_{12}^T = \nu_{13}^T = 0$.

Возможность такого выбора значений коэффициентов Пуассона слоя, моделирующего зияющие трещины и трещины с частичным заполнением, можно объяснить тем, что скальные контакты, через которые передаётся внешняя нагрузка, изолированы друг от друга и поэтому в пределах трещин под действием как нормальной, так и продольной нагрузок, не возникает ни поперечной, ни продольной деформации. При рыхлом заполнителе трещин такими под действием внешней нагрузки деформациями можно пренебречь.

Таким образом, с учётом сделанных выше предположений матрица тензора податливости слоя (2.2), моделирующего трещину, упростится и примет вид:

$$T = \begin{pmatrix} 1/E_T & 0 & 0 & \eta_{12,1}^T/E_T & \eta_{12,1}^T/E_T & 0 \\ 0 & 1/E_0^T & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/E_0^T & 0 & 0 & 0 \\ \eta_{1,12}^T/G_{12}^T & 0 & 0 & 1/G_{12}^T & 0 & 0 \\ \eta_{1,12}^T/G_{12}^T & 0 & 0 & 0 & 1/G_{12}^T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{23}^T \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

Из (2.3) видно, что для определения матрицы податливости слоя моделирующего трещину необходимо знать его деформационные характеристики: модуль деформации E_T , модуль сдвига G_{12}^T и коэффициенты влияния $\eta_{12,1}^T$ и $\eta_{1,12}^T$. В дальнейшем будет видно, что модули слоя E_0^T и G_{23}^T не влияют на эффективные деформационные характеристики скального массива и следовательно, нет необходимости их определения.

Далее будем считать, что нормальный к плоскости трещины модуль деформации есть функция нормального к ней напряжения, т.е. $E_T = E_T(\sigma_n)$, а модуль сдвига G_{12}^T и коэффициенты влияния $\eta_{12,1}^T$ и $\eta_{1,12}^T$ являются функциями

нормального и касательного вдоль трещины напряжений, а именно: $G_{12}^T = G_{12}^T(\sigma_n, \tau)$, $\eta_{12,1}^T = \eta_{12,1}^T(\sigma_n, \tau)$, $\eta_{1,12}^T = \eta_{1,12}^T(\sigma_n, \tau)$.

Тензор жёсткости трещины является обратным тензору податливости, который здесь представлен в виде матрицы (2.3). Обращая тензор податливости, получим тензор жёсткости трещины, отличные от нуля компоненты которого, с учётом условий симметрии $c_{ijkl} = c_{jikl} = c_{ijlk} = c_{klij}$ будут равны:

$$\begin{aligned} c_{1111}^T &= \frac{E_T}{1 - 2 \cdot \eta_{1,12}^T \cdot \eta_{12,1}^T}; & c_{2222}^T &= c_{3333}^T = E_0^T; \\ c_{1112}^T &= c_{1113}^T = -\frac{\eta_{1,12}^T \cdot E_T}{1 - 2 \cdot \eta_{1,12}^T \cdot \eta_{12,1}^T} = -\frac{\eta_{12,1}^T \cdot G_{12}^T}{1 - 2 \cdot \eta_{1,12}^T \cdot \eta_{12,1}^T}; \\ c_{1212}^T &= c_{1313}^T = \frac{(1 - \eta_{1,12}^T \cdot \eta_{12,1}^T) \cdot G_{12}^T}{1 - 2 \cdot \eta_{1,12}^T \cdot \eta_{12,1}^T}; & c_{2323}^T &= G_{23}^T; \\ c_{1213}^T &= c_{1312}^T = \frac{\eta_{1,12}^T \cdot \eta_{12,1}^T \cdot G_{12}^T}{1 - 2 \cdot \eta_{1,12}^T \cdot \eta_{12,1}^T}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Компоненты тензора жёсткости ненарушенной скальной породы, которая представляет собой изотропную среду, характеризуются двумя независимыми постоянными и определяются по формуле [Победря, 1984]:

$$c_{ijkl} = \frac{E_r}{2(1 + \nu_r)} \left(\frac{2\nu_r}{1 - 2\nu_r} \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{il} \delta_{jk} \right). \quad (2.5)$$

Чтобы определить эффективные деформационные характеристики трещиноватого скального массива, применим параметрический метод асимптотического усреднения.

Для этого запишем уравнение равновесия в перемещениях, которое представляет собой нелинейное дифференциальное уравнение с коэффициентами, зависящими от напряженного состояния:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(A_{ij}(\xi, \mathbf{p}) \left(\frac{\partial U(x, \xi, \mathbf{p})}{\partial x_j} \right) \right) + \mathbf{F} = 0, \quad (2.6)$$

с контактными условиями (в данном случае предполагается идеальный контакт):

$$[\mathbf{U}]_{\Sigma} = \left[A_{ij}(\xi, \mathbf{p}) \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_j} \right) n_i \right]_{\Sigma} = 0, \quad (2.7)$$

где $A_{ij} = \|c_{ijkl}\|$ – матрицы, определяющие тензор жёсткости ненарушенной скальной породы и трещин; $\mathbf{U} = \{u_i\}$ – вектор перемещений; $\mathbf{F} = \{F_i\}$ – вектор нагрузки; $\mathbf{p} = \{p_1, p_2, \dots, p_m\}$ – набор параметров, от которых зависят значения компонентов тензора жёсткости; m – число параметров; Σ – граница раздела ненарушенная скальная порода-трещина; $\mathbf{n} = \{n_i\} = (n_1, n_2, n_3)$ – вектор внешней нормали к границе раздела ненарушенная скальная порода-трещина; $i, j, k, l = 1, 2, 3$.

Решение уравнения (2.6) с контактными условиями (2.7) в соответствии с параметрическим методом асимптотического усреднения ищется в виде асимптотики по функциям «медленных» x и «быстрых» ξ переменных, связанных с ячейкой периодичности:

$$\mathbf{U}(x) = \mathbf{U}(x, \xi, \mathbf{p}) = \sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon^l \mathbf{U}^{(l)}(x, \xi, \mathbf{p}), \quad \xi = x/\varepsilon, \quad \varepsilon = l/L. \quad (2.8)$$

Подставим (2.8) в уравнение (2.6) и контактные условия (2.7) и воспользуемся правилом разделения переменных при дифференцировании сложной функции. При этом отметим, что операторы дифференцирования разделения переменных в параметрическом методе будут различаться от операторов дифференцирования в классическом методе асимптотического усреднения.

«Быстрые» и «медленные» переменные в параметрическом методе разделяются с помощью формулы дифференцирования сложной функции с учётом зависимостей от параметров:

$$\frac{\partial}{\partial x_k} = D^k + \varepsilon^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial \xi_k} + \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \xi_k} \nabla_{\mathbf{p}} \right), \quad \text{где } D^k = \frac{\partial}{\partial x_k} + \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x_k} \nabla_{\mathbf{p}}. \quad (2.9)$$

В то время как в классическом методе асимптотического усреднения, без параметрических зависимостей, они имеют вид:

$$\frac{\partial}{\partial x_k} = D^k + \varepsilon^{-1} \frac{\partial}{\partial \xi_k}, \quad \text{где } D^k = \frac{\partial}{\partial x_k} \quad (2.10)$$

В результате подстановки (2.8) в (2.6) и (2.7) с учётом (2.9) и приравнивая выражения при одинаковых степенях ε , получаем бесконечную рекуррентную цепочку уравнений с соответствующими им контактными условиями, решение которых даёт нам решение уравнения (2.6). Из анализа структуры полученных уравнений было получено [Власов, Волков-Богородский, 2014; Vlasov, Volkov-Bogorodsky, 2018], что первый член в асимптотическом разложении (2.8) не зависит от «быстрой» переменной ξ и может быть записан следующим образом:

$$U^{(0)}(x, \xi, \mathbf{p}) = V_0(x), \quad (2.11)$$

а последующие члены разложения представимы в виде:

$$U^{(1)}(x, \xi, \mathbf{p}) = N_{i_1}(\xi, \mathbf{p}) D^{i_1} V_0(x); \quad (2.12)$$

$$U^{(l)}(x, \xi, \mathbf{p}) = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_l} N_{i_1, i_2, \dots, i_l}(\xi, \mathbf{p}) D^{i_1, i_2, \dots, i_l} V_0(x), \quad l \geq 1 \quad (2.13)$$

где $N_{i_1, i_2, \dots, i_l}(\xi, \mathbf{p})$ – периодические по ξ функции.

Отметим, что условие независимости (2.11) первого члена в асимптотическом разложении (2.8) непосредственно вытекает из первого уравнения в рекуррентной цепочке. Второе уравнение в этой цепочке является центральным и получило название «задачи на ячейке». Формулировка этой задачи имеет следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial \xi_i} \left(A_{ij}(\xi, \mathbf{p}) \frac{\partial (N_{i_1} + \xi_{i_1} E)}{\partial \xi_j} \right) = 0, \quad (2.14)$$

с условиями по контакту граница – включение:

$$[N_{i_1}] = \left[A_{ij}(\xi, \mathbf{p}) \frac{\partial (N_{i_1} + \xi_{i_1} E)}{\partial \xi_j} n_i \right] = 0. \quad (2.15)$$

Условие разрешимости (существования и единственности решения) для периодических функций быстрых переменных $N_{i_1, i_2, \dots, i_l}(\xi, \mathbf{p})$ приводит к необходимости «усреднения» по периоду всех членов асимптотического равенства в разложении уравнений с быстро осциллирующими коэффициентами с фиксацией среднего значения на ячейке периодичности некоторой константой

$\langle \mathbf{N}_{i_1, i_2, \dots, i_l} \rangle_{\xi} = \frac{1}{|V|} \int_V \mathbf{N}_{i_1, i_2, \dots, i_l} dv = \frac{1}{|V|} \int_V \mathbf{N}_{i_1, i_2, \dots, i_l} d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 = const$. Для определённости будем

полагать, что $const = 0$. В результате для вектор-функции медленных переменных, а именно, перемещений $\mathbf{V}_0(x)$, получается уравнение равновесия теории упругости с эффективными характеристиками, в котором все члены, зависящие от быстрых переменных, заменяются их средними по периоду:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\hat{A}_{ij}(\mathbf{p}) \left(\frac{\partial \mathbf{V}_0}{\partial x_j} \right) \right) + \mathbf{F} = 0. \quad (2.16)$$

где $\hat{A}_{ij} = \|\hat{c}_{ijkl}\|$ – матрицы, определяющие эффективный тензор жёсткости. Сами матрицы находятся по формуле:

$$\hat{A}_{ij} = \left\langle A_{ik}(\xi, \mathbf{p}) \frac{\partial (N_j + \xi_j \mathbf{E})}{\partial \xi_k} \right\rangle, \quad (2.17)$$

а матрицы-функции N_j из задачи на «ячейке» [Власов, Волков-Богородский, 2014; Bakhvalov, Panasenko, 1989; Vlasov, Volkov-Bogorodsky, 2018].

В этой формуле сохраняется зависимость от параметра, поэтому она определяет алгоритм нахождения нелинейной зависимости эффективного тензора жёсткости и, соответственно, описывает нелинейную диаграмму напряжение – деформация эффективного материала (скальной породы).

Следуя буквально процедуре усреднения, получим, что эффективные деформационные характеристики трещиноватого скального массива, рассечённого плоскопараллельной системой трещин, в общем виде определяются зависимость, которая по виду совпадает с зависимостью [Власов, Мерзляков, 2009]:

$$\hat{A}_{ij} = \langle A_{ij} \rangle + \langle A_{i1} A_{11}^{-1} \rangle \langle A_{11}^{-1} \rangle^{-1} \langle A_{11}^{-1} A_{1j} \rangle - \langle A_{i1} A_{11}^{-1} A_{1j} \rangle, \quad (2.18)$$

где $A_{ij} = \|c_{ijkl}\|$ – матрицы, определяющие тензоры жёсткости ненарушенной скальной породы и трещин; $\hat{A}_{ij} = \|\hat{c}_{ijkl}\|$ – матрицы, составленные из компонентов

тензора жёсткости скального массива; $i, j, k, l = 1, 2, 3$; $\langle * \rangle = \frac{1}{|V|} \int_V (*) dV$ – среднее значение по типовому элементу структуры (ячейке периодичности).

При этом надо учитывать, что матрицы, определяющие тензор жёсткости трещин, являются функциями σ_n и τ .

Заметим, что нелинейная зависимость (2.18) получена усреднением нелинейного уравнения (2.6), а не так как это было сделано в работе [Власов, 2010], в которой она была получена усреднением аппроксимирующих уравнений (2.6) линейных уравнений, т.е., по существу, аппроксимацией упругими решениями. Таким образом, показано, что нелинейная зависимость (2.18) является точной.

Подставим в формулы (2.18) выражения для компонентов тензора жёсткости ненарушенной скальной породы (2.5) и трещины (2.4). Тогда, учитывая действительные значения относительной ширины раскрытия трещин α , которые по порядку величины равны 0.01 – 0.0001, как это отмечено, например, в работах [Руппенейт, 1975; Тарасова, 1968; Методические рекомендации...], и, отбрасывая малые более высокого порядка, получим следующие зависимости по определению эффективного тензора жёсткости скального массива, рассечённого плоскопараллельной системой трещин:

$$\begin{aligned}
 \hat{c}_{1111} &= \beta (\alpha G_r + G_{12}^T) E_T E_r; & \hat{c}_{2222} = \hat{c}_{3333} &= \frac{E_r}{1 - \nu_r^2} + \hat{c}_{1111} \frac{\nu_r^2}{(1 - \nu_r)^2}; \\
 \hat{c}_{1122} = \hat{c}_{1133} &= \hat{c}_{1111} \frac{\nu_r}{1 - \nu_r}; & \hat{c}_{2233} &= \frac{\nu_r E_r}{1 - \nu_r^2} + \hat{c}_{1111} \frac{\nu_r^2}{(1 - \nu_r)^2}; \\
 \hat{c}_{1212} = \hat{c}_{1313} &= \frac{G_{12}^T G_r}{G_{12}^T + \alpha G_r}; & \hat{c}_{2323} &= G_r; \\
 \hat{c}_{1112} = \hat{c}_{1113} &= -\alpha \cdot \beta \cdot \eta_{12,1}^T E_T E_r G_r = -\alpha \cdot \beta \cdot \eta_{12,1}^T G_{12}^T E_r G_r; \\
 \hat{c}_{1222} = \hat{c}_{1233} = \hat{c}_{1322} = \hat{c}_{1333} &= \hat{c}_{1112} \frac{\nu_r}{1 - \nu_r}; \\
 \hat{c}_{1213} = \hat{c}_{1312} &= -\alpha \cdot \hat{c}_{1212} \hat{c}_{1112} \frac{\eta_{12,1}^T}{E_T}.
 \end{aligned} \tag{2.19}$$

Здесь $\beta = \frac{1 - \nu_r}{(\alpha G_r + G_{12}^T) [\alpha (1 - \nu_r) E_r + (1 - \nu_r - 2\nu_r^2) E_T] - 2\alpha^2 (1 - \nu_r) \eta_{1,12}^T \eta_{12,1}^T E_r G_r}$ и

$\alpha = \delta / l$, где δ – ширина раскрытия трещины; l – расстояние между трещинами.

Обращая тензор жёсткости, элементами которого определяются по формулам (2.19), получим эффективный тензор податливости, который в матричной форме записывается в виде:

$$\left(\begin{array}{cccccc} \frac{\alpha E_r + (1 - \alpha) E_T}{E_r E_T} & -\nu_r / E_r & -\nu_r / E_r & \alpha \eta_{12,1}^T / E_T & \alpha \eta_{12,1}^T / E_T & 0 \\ & 1 / E_r & -\nu_r / E_r & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 / E_r & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{\alpha G_r + G_{12}^T}{G_r G_{12}^T} & 0 & 0 \\ & Sym & & & \frac{\alpha G_r + G_{12}^T}{G_r G_{12}^T} & 0 \\ & & & & & 1 / G_r \end{array} \right) \quad (2.20)$$

Из матрицы податливости (2.20) видно, что для определения эффективных деформационных характеристик массива скальных пород, равномерно рассечённого системой плоскопараллельных трещин, достаточно знать деформационные характеристики ненарушенной породы E_r , ν_r и характеристики трещин: модуль деформации $E_T = E_T(\sigma_n)$, модуль сдвига $G_{12}^T = G_{12}^T(\sigma_n, \tau)$, коэффициент влияния $\eta_{12,1}^T = \eta_{12,1}^T(\sigma_n, \tau)$.

Указанные характеристики трещины можно определить, зная нормальную k_n и сдвиговую k_s жёсткости трещины и угол ψ или коэффициент $\lambda = tg(\psi)$ дилатансии.

В работах [Ladanyi, Archambault, 1969; Ladanyi, Archambault, 1980; Yoshinaka, Yamabe, 1986] было показано, что нормальная жёсткость трещины является функцией нормального к ней напряжения $k_n = k_n(\sigma_n)$, а сдвиговая жёсткость – нормального к плоскости трещины напряжения и касательного напряжения вдоль неё $k_s = k_s(\sigma_n, \tau)$. Поэтому характеристики слоя,

моделирующего трещину, будем определять, используя нормальную и сдвиговую жёсткости трещины и угол ψ или коэффициент дилатансии $\lambda = \operatorname{tg}(\psi)$, который будем считать независимым от вида напряжённого состояния величиной.

Как было показано в [Власов, Мерзляков, 2009], модуль деформации, модуль сдвига и коэффициент влияния трещины связаны с нормальной и сдвиговой жёсткостями трещины и коэффициентом дилатансии $\lambda = \operatorname{tg}(\psi)$, следующим образом:

$$E_T = \delta \cdot k_n(\sigma_n); \quad (2.21)$$

$$G_{12}^T = \delta \cdot k_s(\sigma_n, \tau); \quad (2.22)$$

$$\eta_{12,1}^T = \lambda \frac{E_T}{G_{12}} = \lambda \frac{k_n}{k_s}, \quad (2.23)$$

где δ – ширина раскрытия трещины.

Из симметрии матрицы податливости (2.3) и формул (2.21) – (2.23) получаем, что $\eta_{1,12}^T = \lambda$.

Заметим, что чем выше уровень нормальных к плоскости трещины напряжений, тем выше значения нормальной и касательной жёсткостей трещины, а при повышении уровня касательных в плоскости трещины напряжений значения касательной жёсткости уменьшаются. Всё это следует из общих физических соображений.

Таким образом, в обобщённом законе Гука можно учесть «упругую» дилатансию с помощью коэффициентов влияния первого и второго родов. Далее, используя зависимости (2.21) – (2.23), матрица податливости (2.20) принимает следующий вид:

$$\left(\begin{array}{cccccc}
 \frac{\alpha E_r + (1-\alpha)\delta k_n}{\delta k_n E_r} & -\frac{\nu_r}{E_r} & -\frac{\nu_r}{E_r} & \frac{\alpha\lambda}{\delta k_s} & \frac{\alpha\lambda}{\delta k_s} & 0 \\
 & \frac{1}{E_r} & -\frac{\nu_r}{E_r} & 0 & 0 & 0 \\
 & & \frac{1}{E_r} & 0 & 0 & 0 \\
 & & & \frac{\alpha G_r + \delta k_s}{\delta k_s G_r} & 0 & 0 \\
 & \text{Sym} & & & \frac{\alpha G_r + \delta k_s}{\delta k_s G_r} & 0 \\
 & & & & & \frac{1}{G_r}
 \end{array} \right) \quad (2.24)$$

Учитывая малость соотношения $\alpha = \delta/l$, матрицу податливости (2.24) можно представить в виде:

$$\left(\begin{array}{cccccc}
 \left(\frac{1}{E_r} + \frac{1}{k_n l} \right) & -\frac{\nu_r}{E_r} & -\frac{\nu_r}{E_r} & -\frac{\lambda}{k_s l} & -\frac{\lambda}{k_s l} & 0 \\
 & \frac{1}{E_r} & -\frac{\nu_r}{E_r} & 0 & 0 & 0 \\
 & & \frac{1}{E_r} & 0 & 0 & 0 \\
 & & & \left(\frac{1}{G_r} + \frac{1}{k_s l} \right) & 0 & 0 \\
 & \text{Sym} & & & \left(\frac{1}{G_r} + \frac{1}{k_s l} \right) & 0 \\
 & & & & & \frac{1}{G_r}
 \end{array} \right) \quad (2.25)$$

Компоненты матриц (2.24) и (2.25) определяют полный набор эффективных деформационных характеристик скального массива, рассечённого плоскопараллельной системой зияющих трещин, которые можно получить, проведя экспериментальные исследования. Отметим также, что структура матрицы тензора податливости (2.24) или же (2.25) при ненулевом коэффициенте дилатансии говорит о несоосности тензоров напряжений и деформаций.

При решении задач геомеханики не учитывают коэффициенты влияния первого и второго родов [Гудман, 1987; Зерцалов, 2014; Орехов, Зерцалов, 1999; Amadei, 1984; Amadei, Saeb, 1990; Chang, Huang, 1988; Cuisiat, Hyett, Hudson, 1990; Nayak, Zienkiewicz, 1972], т.е. пренебрегают «упругой» дилатансией. В этом случае зависимости для определения компонентов эффективного тензора жёсткости (2.19) упрощаются и принимают следующий вид:

$$\begin{aligned}\hat{c}_{1111} &= \beta E_T E_r; & \hat{c}_{2222} &= \hat{c}_{3333} = \frac{E_r}{1-\nu_r^2} + \hat{c}_{1111} \frac{\nu_r^2}{(1-\nu_r)^2}; \\ \hat{c}_{1122} &= \hat{c}_{1133} = \hat{c}_{1111} \frac{\nu_r}{1-\nu_r}; & \hat{c}_{2233} &= \frac{\nu_r E_r}{1-\nu_r^2} + \hat{c}_{1111} \frac{\nu_r^2}{(1-\nu_r)^2}; \\ \hat{c}_{1212} &= \hat{c}_{1313} = \frac{G_{12} G_r}{G_{12} + \alpha G_r}; & \hat{c}_{2323} &= G_r,\end{aligned}\quad (2.26)$$

где $\beta = (1-\nu_r) / [\alpha(1-\nu_r)E_r + (1-\nu_r - 2\nu_r^2)E_T]$.

Таким образом, из полученных соотношений (2.26) следует, что рассматриваемая модель скального массива без учёта дилатансии сводится к эффективной трансверсально-изотропной среде с плоскостью изотропии параллельной плоскости трещин, эффективные технические деформационные характеристики такого скального массива, как это также следует из (2.20), (2.24) и (2.25) будут определяться по формулам:

$$\begin{aligned}E_{\perp} &= \frac{E_T E_r}{E_T + \alpha E_r} = \frac{\delta k_n E_r}{\delta k_n + \alpha E_r} = \frac{l k_n E_r}{l k_n + E_r}; & E_{\parallel} &\approx E_r; \\ G_{\perp} &= \frac{G_{12} G_r}{G_{12} + \alpha G_r} = \frac{\delta k_s G_r}{\delta k_s + \alpha G_r} = \frac{l k_s G_r}{l k_s + G_r}; \\ G_{\parallel} &\approx G_r = \frac{E_r}{2(1+\nu_r)}; & \nu_{\parallel, \perp} &= \nu_{\parallel, \parallel} = \nu_r,\end{aligned}\quad (2.27)$$

где E_{\perp} , E_{\parallel} – эффективные модули деформации массива в направлении ортогональном плоскости трещин и в плоскости изотропии, соответственно; G_{\perp} , G_{\parallel} – эффективные модули сдвига в плоскости ортогональной плоскости трещин и в плоскости изотропии, соответственно; $\nu_{\parallel, \perp}$ – эффективный коэффициент Пуассона, характеризующий деформацию в плоскости трещины при действии

нагрузки поперёк плоскости трещины; $\nu_{II,II}$ – эффективный коэффициент Пуассона в плоскости изотропии.

Из этих же формул видно, что деформируемость трансверсально-изотропной среды эквивалентной скальному массиву, рассечённому системой плоскопараллельных трещин, характеризуется 4-мя деформационными характеристиками, а именно, модулем деформации и коэффициентом Пуассона ненарушенного материала скальной породы E_r и ν_r , модулем деформации слоя E_T , моделирующего трещину или нормальной жёсткостью трещины k_n , модулем сдвига этого слоя или касательной жёсткостью трещины k_s , а также геометрическим параметром трещин – относительной шириной их раскрытия α или расстоянием между трещинами l . Из них также следует, что чем выше уровень нормальных к плоскости трещины напряжений, тем выше значения эффективных модулей деформации E_{\perp} и сдвига G_{\perp} , а при повышении уровня касательных в плоскости трещины напряжений значения модуля сдвига уменьшаются.

2.2 Деформационные характеристики скального массива с ортогональной системой трещин

В предыдущем параграфе были получены зависимости для определения эффективных характеристик деформационных свойств скальных пород, равномерно рассечённых одной системой плоскопараллельных трещин.

Если скальный массив рассечён тремя плоскопараллельными системами трещин ортогональными друг другу, то при сделанных выше в параграфе 2.1 предположениях и учитывая малость меры области пересечения трещин, можно получить следующие аналитические зависимости для определения эффективных технических деформационных характеристик скального массива, рассечённого ортогональной системой трещин:

$$\begin{aligned}
E_1 &= \frac{l^{(1)}k_n^{(1)}E_r}{l^{(1)}k_n^{(1)} + E_r}; \quad E_2 = \frac{l^{(2)}k_n^{(2)}E_r}{l^{(2)}k_n^{(2)} + E_r}; \quad E_3 = \frac{l^{(3)}k_n^{(3)}E_r}{l^{(3)}k_n^{(3)} + E_r}; \\
G_{12} &= \frac{l^{(1)}l^{(2)}k_s^{(1)}k_s^{(2)}G_r}{l^{(1)}l^{(2)}k_s^{(1)}k_s^{(2)} + l^{(2)}k_s^{(2)}G_r + l^{(1)}k_s^{(1)}G_r}; \\
G_{13} &= \frac{l^{(1)}l^{(3)}k_s^{(1)}k_s^{(3)}G_r}{l^{(1)}l^{(3)}k_s^{(1)}k_s^{(3)} + l^{(3)}k_s^{(3)}G_r + l^{(1)}k_s^{(1)}G_r}; \\
G_{23} &= \frac{l^{(2)}l^{(3)}k_s^{(2)}k_s^{(3)}G_r}{l^{(2)}l^{(3)}k_s^{(2)}k_s^{(3)} + l^{(3)}k_s^{(3)}G_r + l^{(2)}k_s^{(2)}G_r}; \\
V_{21} &= \frac{l^{(2)}v_r k_n^{(2)}}{l^{(2)}k_n^{(2)} + E_r}; \quad V_{13} = \frac{l^{(1)}v_r k_n^{(1)}}{l^{(1)}k_n^{(1)} + E_r}; \quad V_{32} = \frac{l^{(3)}v_r k_n^{(3)}}{l^{(3)}k_n^{(3)} + E_r},
\end{aligned} \tag{2.28}$$

где надстрочными знаками обозначены соответствующие системы трещин.

Эти зависимости получаются из решения задачи на «ячейке» с использованием принципа Сен-Венана. Из них видно, что скальная порода, рассечённая тремя ортогональными системами трещин, ведёт себя как ортотропный материал с тремя главными осями перпендикулярными к плоскостям трещин.

2.3 Приведение скального массива с произвольной системой трещин к эквивалентной однородной среде

Инженерный подход к определению деформационных свойств скальных массивов, рассечённых несколькими системами плоскопараллельных трещин, предложен в работе [Власов, 2010]. Для этого используется принцип наложения, состоящий в последовательном усреднении свойств неоднородного массива для каждой новой системы трещин. Этот процесс схематично в графической форме представлен на рисунке 2.2. При этом предполагается, что эффективные свойства массива, рассечённого несколькими системами плоскопараллельных трещин, равны эффективным свойствам, полученным в результате такого последовательного усреднения.

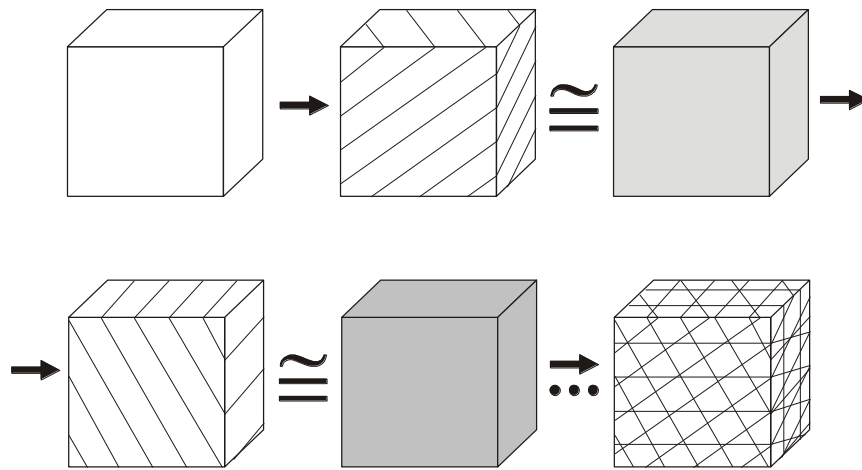


Рисунок 2.2 – Приведение трещиноватого скального массива к эквивалентной однородной среде [Власов, 2010]

В представленной на рисунке 2.2 процедуре усреднения только 1-й шаг связан с действительными свойствами ненарушенной скальной породы (скальных отдельностей). Последующие шаги используют эффективные свойства эквивалентной среды, полученные на предыдущем этапе усреднения.

Для удобства построения алгоритма вычисления эффективных характеристик деформационных свойств, на каждом последующем шаге усреднения будем тензор жёсткости очередной системы трещин преобразовывать в исходную систему координат, которая определяется первым этапом усреднения – координатными осями первой системы трещин, две из которых лежат в плоскости этой системы трещин, а одна ортогональна ей.

Тензора жёсткости преобразуются в соответствии с правилами преобразования тензоров, по следующему закону:

$$c_{ijkl} = \frac{\partial x_i}{\partial x'_m} \frac{\partial x_j}{\partial x'_n} \frac{\partial x_k}{\partial x'_p} \frac{\partial x_l}{\partial x'_r} c'_{mnp r} , \quad (2.29)$$

где x_i, x_j, x_k, x_l – координатные оси исходной системы координат, в которую преобразуются компоненты тензора жёсткости; x'_m, x'_n, x'_p, x'_r – координатные оси, связанные с системой трещин, компоненты тензора жёсткости которой преобразуются к исходной системе координат; c_{ijkl} – значения компонент тензора

жёсткости в исходной системе координат; c_{mnpqr} – значения компонент тензора жёсткости трещин, которые приводятся к исходной системе координат; $i, j, k, l, m, n, p, r = 1, 2, 3$.

В случае двух систем трещин, которые пересекаются между собой под углом β , с одной из систем трещин связать исходную систему координат, то формулы перехода из системы координат связанные со второй системой трещин к исходной системе, связанной с первой системой трещин, могут быть представлены в виде:

$$\begin{aligned} x_1 &= x'_1 \cos \beta + x'_2 \sin \beta; \\ x_2 &= -x'_1 \sin \beta + x'_2 \cos \beta; \\ x_3 &= x_3. \end{aligned} \quad (2.30)$$

По окончании процедуры приведения скального массива к эффективной среде эффективный тензор жёсткости приводим к системе координат его упругой симметрии. Используя приведённый алгоритм приведения скального массива рассечённого тремя ортогональными системами трещин к эквивалентной сплошной среде, мы придём к зависимостям (2.28).

Отметим, т.к. нормальная k_n и сдвиговая k_s жёсткости трещин зависят от нормальных напряжений к плоскостям трещин и касательных напряжений в плоскости трещин, то для их определения необходимо определить вектор напряжения, действующего на площадке в плоскости трещин и за тем разложить его на нормальную σ_{\perp} и касательную составляющие τ_{\parallel} к этой площадке. Эта процедура определяется следующими зависимостями:

$$\bar{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{12} & \sigma_2 & \tau_{23} \\ \tau_{13} & \tau_{23} & \sigma_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}; \quad (2.31)$$

$$\sigma_{\perp} = (\bar{p}, \bar{n}); \quad (2.32)$$

$$\tau_{\parallel} = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 - \sigma_{\perp}^2}, \quad (2.33)$$

где n_1, n_2, n_3 – составляющие единичного вектора нормали \bar{n} к плоскости трещины, равные направляющим косинусам $\cos(\bar{n}, x_1), \cos(\bar{n}, x_2), \cos(\bar{n}, x_3)$; \bar{p} –

вектор напряжения на площадке в плоскости трещины; (\bar{p}, \bar{n}) – скалярное произведение вектора напряжения на вектор нормали.

В заключении этого параграфа заметим, что экспериментально установлено [Гуныев и др., 1974; Жигун и др., 2019; Tarnopolskii, Zhigun, Polyakov, 1993] и подтверждено теоретически [Жигун и др., 2019; Жигун, Поляков, 1978], что в ортотропных средах, а это максимальный уровень анизотропии, который рассматривается в задачах механики скальных пород, модуль сдвига в одной из плоскостей параллельной главным осям ортотропии (например, $.x_1x_2.$), где реализуется его минимальное значение, с высокой степенью точности может быть определён по формуле:

$$G_{x_1x_2} = \frac{E_{45}}{2(1 + \nu_{45})}, \quad (2.34)$$

где E_{45} и ν_{45} – эффективные модуль деформации и коэффициент Пуассона под углом 45° к главным осям упругой симметрии эквивалентной среды.

Таким образом, для ортотропного материала имеет место аналогичная изотропным материалам связь модуля сдвига в плоскости пластины с модулем упругости и коэффициентом Пуассона, полученными под углом 45° к его главным осям упругой симметрии. Отсюда следует, что в качестве независимых эффективных деформационных характеристик эквивалентной скальному массиву изотропной среды следует брать модуль деформации $E_m = E_{45}$ и коэффициент Пуассона $\nu_m = \nu_{45}$.

Изложенное выше не учитывает хаотическую, полигональную и сфероидальную типы трещиноватости С. Н. Чернышёв [Чернышёв, 1983] скального массива. Для применения метода асимптотического усреднения в таких случаях требуется рассматривать представительный элемент объёма. Математическое обоснование применимости метода асимптотического усреднения, где в качестве ячейки периодичности принимается представительный объем, к средам со случайной (не удовлетворяющей условию периодичности) стохастически однородной структурой представлено в работе [Козлов, 1978b].

2.4 Сравнение аналитических и численных решений

Для определения модуля деформации условного скального массива проведём серию численных экспериментов на трещиноватых образцах горной породы в условиях пространственной (трёхмерной) задачи в упругой постановке в программном комплексе ZSoil. Затем сравним между собой результаты численных и аналитических решений.

Рассмотрим условный скальный массив, классифицируемый как среднетрещиноватый по СП 23.13330.2018 «Основания гидротехнических сооружений». Пусть, как и ранее, трещиноватость представлена преимущественно плоскопараллельной и ортогональной системами трещин. Шаг трещин в массиве определим равным 0.1 и 0.2 м. Образцы горных пород показаны на рисунках 2.3 – 2.6.

Примем модуль деформации ненарушенной породы между трещин $E_r = 20000$ МПа, коэффициент Пуассона $\nu_r = 0.3$. В численном расчёте трещины в испытуемых образцах представим контактными элементами, характеризуемые нормальной k_n и касательной k_s жёсткостями.

Скальные массивы средней трещиноватости во многих случаях имеют ширину раскрытия трещин от 1 до 5 мм. Воспользуемся средними значениями жёсткостей трещин, полученными в результате анализа натуральных (полевых) опытов, выполненных сотрудниками АО «Институт Гидропроект» на целом ряде геотехнических объектов [Речицкий, 1998]. Для оценочных расчётов зададимся $k_n = 19$ МПа/мм.

Результаты численных расчётов показаны на рисунках 2.7 – 2.10 и в таблице 2.1.

$P = 10 \text{ МПа}$

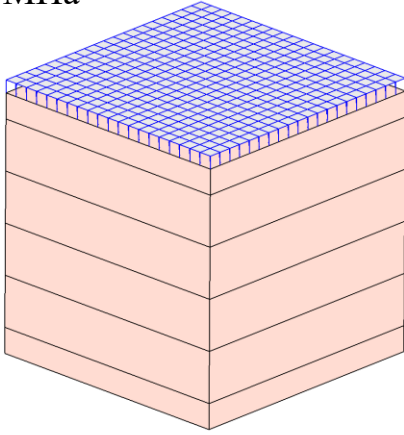


Рисунок 2.3 – Образец 1.
Шаг трещин 0.2 м, RQD = 50%

$P = 10 \text{ МПа}$

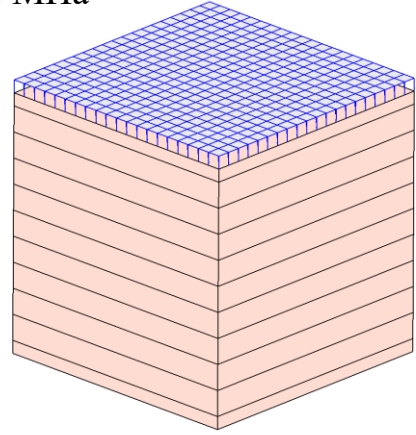


Рисунок 2.4 – Образец 2.
Шаг трещин 0.1 м, RQD = 75%

$P = 10 \text{ МПа}$

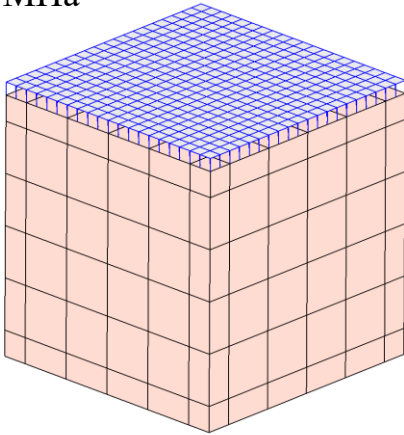


Рисунок 2.5 – Образец 3.
Шаг трещин 0.2 м, RQD = 50%

$P = 10 \text{ МПа}$

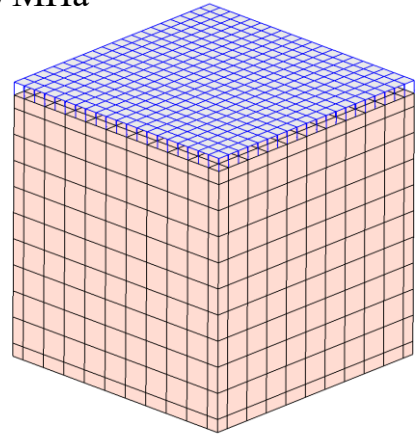


Рисунок 2.6 – Образец 4.
Шаг трещин 0.1 м, RQD = 75%

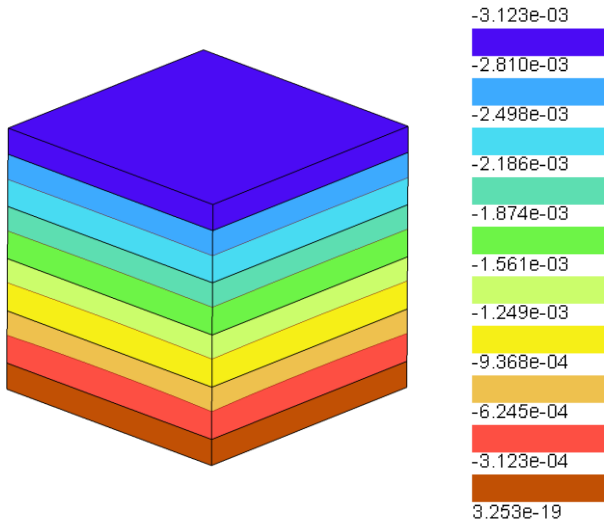


Рисунок 2.7 – Образец 1.
Вертикальные перемещения, м

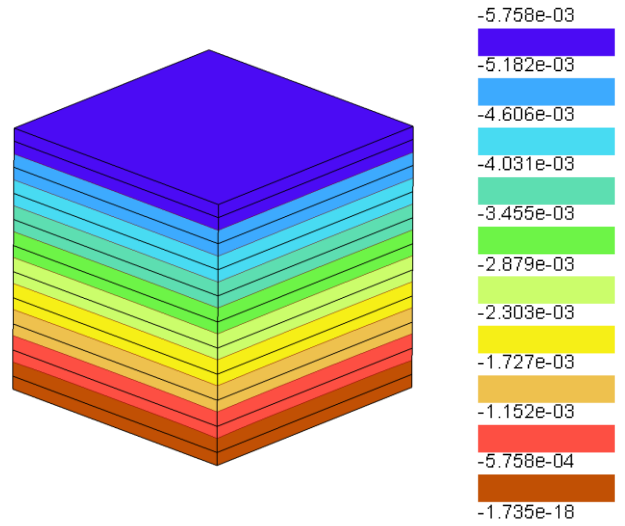


Рисунок 2.8 – Образец 2.
Вертикальные перемещения, м

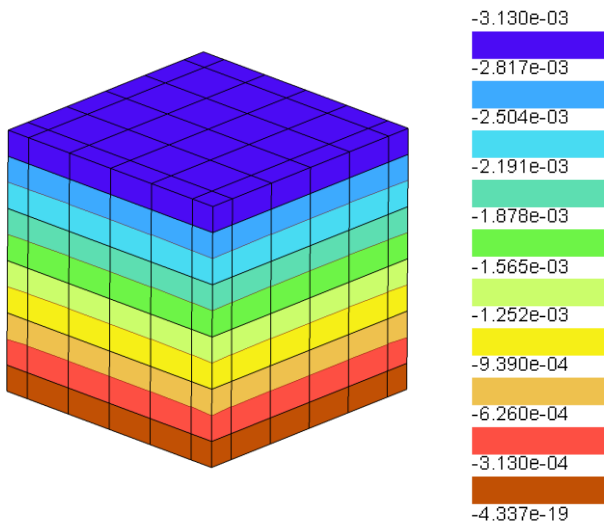


Рисунок 2.9 – Образец 3.
Вертикальные перемещения, м

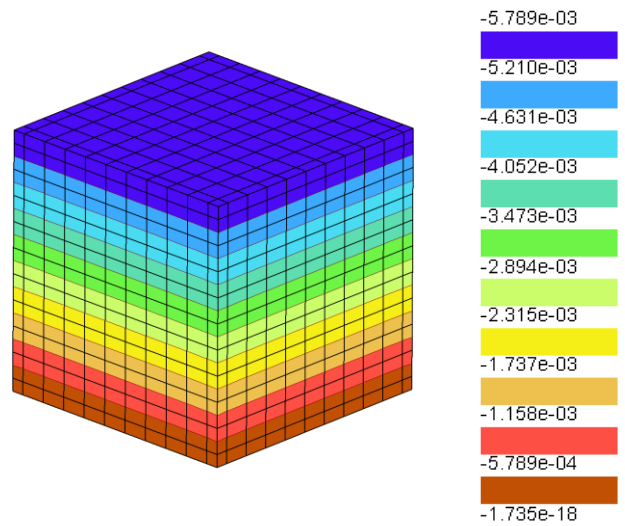


Рисунок 2.10 – Образец 4.
Вертикальные перемещения, м

Таблица 2.1 – Сравнение результатов численных и аналитических решений

Метод	Модуль деформации массива, МПа			
	Плоскопараллельная система трещин		Ортогональная система трещин	
	<i>Образец 1</i>	<i>Образец 2</i>	<i>Образец 3</i>	<i>Образец 4</i>
Численные решения МКЭ	3202	1737	3195	1727
Зависимости (2.27) и (2.28)	3193	1735	3193	1735

Сравнение численных и аналитических расчётов показывает их полную сходимость. Полученные результаты подтверждают правомерность использования зависимостей (2.27) и (2.28) для определения деформационных характеристик трещиноватых скальных массивов с плоскопараллельной и ортогональной системами трещин при соблюдении критерия квазисплошности.

Далее оценим влияние уменьшения нормальной и сдвиговой жёсткостей трещин на деформационные характеристики условного скального массива с плоскопараллельной системой трещин: модуль деформации E_{\perp} в направлении ортогональном плоскости трещин и модуль сдвига G_{\perp} в плоскости ортогональной плоскости трещин. Для этого рассмотрим скальный массив с модулем деформации ненарушенной породы E_r от 5 000 до 100 000 МПа и коэффициентом Пуассона $\nu_r = 0.3$. Значения нормальной жёсткости трещин k_n примем от 0.37 до 102 МПа/мм, а сдвиговой жёсткости k_s от 0.24 до 34 МПа/мм [Речицкий, 1998]. Расстояние между трещинами примем равным 0.25 м.

На рисунках 2.11 и 2.12 в графическом виде представлены зависимости (2.27) относительных модулей деформации E_{\perp} / E_r и сдвига G_{\perp} / G_r от нормальной и сдвиговой жёсткостей трещин, соответственно.

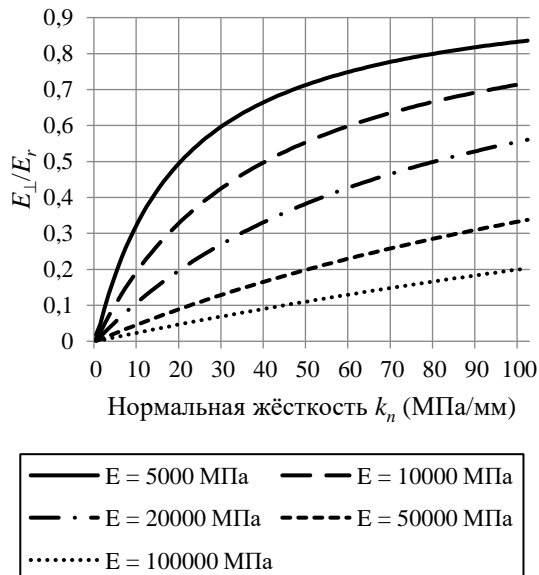


Рисунок 2.11 – График зависимости относительного модуля деформации от нормальной жёсткости трещин

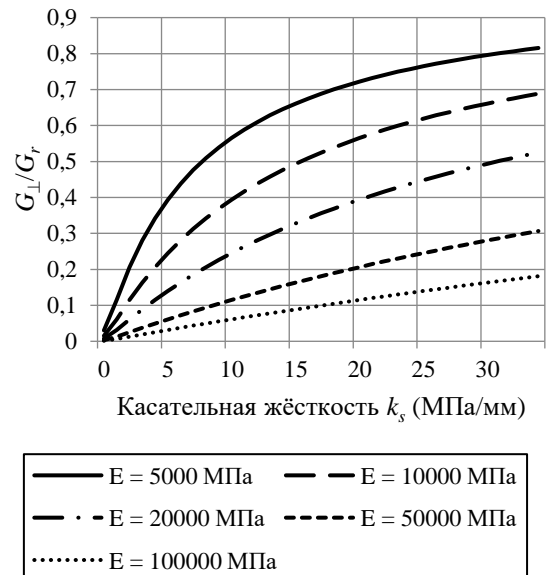


Рисунок 2.12 – График зависимости относительного модуля сдвига от сдвиговой жёсткости трещин

Из графиков прослеживается, что чем больше модуль деформации ненарушенной породы, тем сильнее при прочих равных условиях влияние трещиноватости на деформационные характеристики массива скальных пород.

Выводы по главе 2

1. Представлена методика приведения трещиноватого скального массива к анизотропной однородной среде, деформационные свойства которой зависят от напряженного состояния. Данный подход также может быть применим к оценке трещиноватых скальных массивов с произвольной трещиноватостью. Для этого в качестве ячейки нужно брать представительный элемент объёма. Получаемые при этом эффективные характеристики определяют его модель поведения под нагрузкой, как анизотропную упругопластическую модель деформационного типа с дилатансией.

2. В рамках данного подхода получены простые аналитические зависимости для определения эффективных деформационных характеристик скальных массивов, рассечённых плоскопараллельной и ортогональной системами трещин. Для того чтобы ими воспользоваться требуется определить только минимальный набор свойств, которыми характеризуется скальный массив: расстояние между трещинами, нормальную и сдвиговую жёсткости трещин и модуль деформации ненарушенного скального грунта в образце.

3. Исследования, проведённые в работе, ещё раз подтвердили высокую степень влияния трещиноватости на деформационные свойства скальных массивов и показали, что чем больше модуль деформации ненарушенной породы, или, проще говоря, крепче горная порода, тем сильнее влияние трещиноватости на деформационные характеристики всего скального массива.

4. Подтверждена правомерность использования предложенных зависимостей для определения деформационных характеристик трещиноватых скальных массивов с плоскопараллельной и ортогональной системами трещин при соблюдении критерия квазисплошности.

5. Деформационные свойства трещиноватого массива, полученные в данной главе, позволяют перейти к решению задачи о взаимодействии сваи со скальным основанием.

ГЛАВА 3 АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ МОДЕЛЬНОЙ ЗАДАЧИ О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ СВАИ С ОКРУЖАЮЩИМ МАССИВОМ: *ПОЛУПЛОСКОСТЬ С ОДНОМЕРНЫМ ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫМ РЕБРОМ ЖЁСТКОСТИ*

Математической моделью задачи о взаимодействии одиночной сваи с окружающим породным массивом является трёхмерная краевая задача теории упругости для полупространства с упругим цилиндрическим включением, имитирующим сваю. Проблема заключается в том, что точного решения этой задачи даже для полубесконечной сваи нет, а существующие приближённо-аналитические решения позволяют описать поведение сваи только частично, например, определить вертикальные перемещения головы сваи под нагрузкой [Carter, Kulhawy, 1988].

Основная идея, на которой базируется возможность использования двумерных решений для описания трёхмерной задачи состоит в следующем. В двумерной постановке ребро жёсткости сопряжено с двумя примыкающими к ребру справа и слева пластинами, имитирующими массив. Предположим, для наглядности, что ребро жёсткости имеет цилиндрическую форму, а пластины центрально-симметрично примыкают к нему по всему периметру кругового сечения. Тогда в узкой области, прилегающей к ребру, там, где зазоры между примыкающими пластинами малы, и где в основном происходит передача внешней нагрузки от сваи к массиву, можно надеяться на то, что решение двумерной задачи будет не сильно отличаться от решения соответствующей трёхмерной задачи для полупространства.

В главах 3 и 4 получены аналитические решения для двух модельных задач. *Первая модель* – полуплоскость с одномерным полубесконечным ребром жёсткости перпендикулярным к её прямолинейной границе, на конце которого действует сосредоточенная сила. *Вторая модель* – полуплоскость с периодическим набором одномерных полубесконечных рёбер жёсткости.

Аналитические решения сравниваются с численными результатами, полученными в объёмной постановке с использованием метода конечных элементов (МКЭ), реализованном в программном комплексе ZSoil. Показано, что использование точных решений двумерных задач теории упругости может быть весьма эффективным при оценке напряженно-деформированного состояния сваи, взаимодействующей с вмещающим породным массивом.

Основное содержание глав обсуждается в работах [Власов, Власов, Коваленко, 2022; Власов, 2016; Власов, Зерцалов, 2018; Власов, Зерцалов, 2021].

3.1 Постановка задачи

В этой главе рассмотрена модельная задача, представляющая собой упругую полуплоскость с одномерным полубесконечным ребром жёсткости, перпендикулярным прямолинейной границе полуплоскости, в вершине которого приложена сосредоточенная сила (рисунок 3.1).

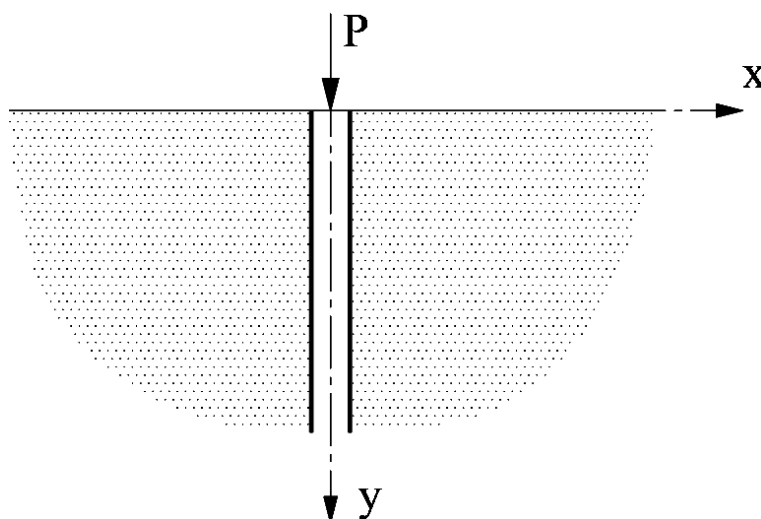


Рисунок 3.1 – Схема задачи

Решение задачи состоит из нескольких этапов. Сначала решается неоднородная задача (рисунок 3.2) для неограниченной плоскости, в которой вдоль оси y действует некоторая распределённая чётно-симметричная нагрузка $Y(y)$.

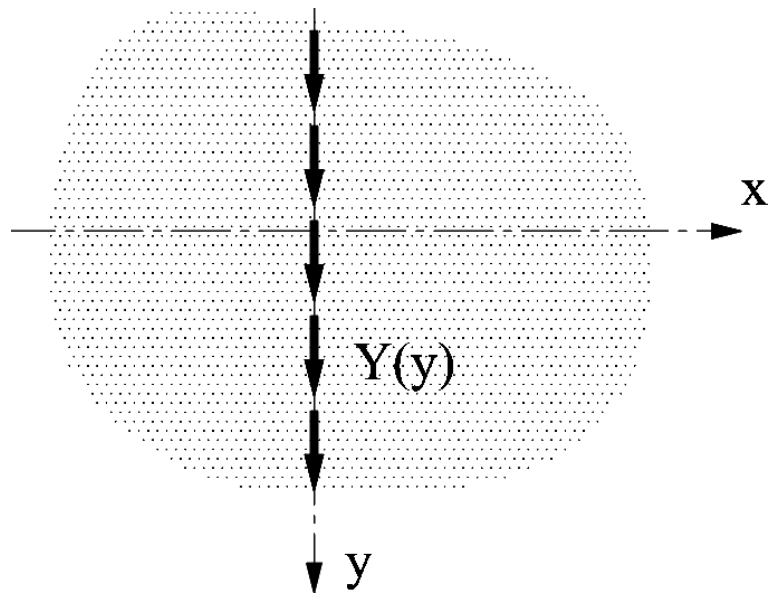


Рисунок 3.2 – Неоднородная задача для неограниченной плоскости

Прикрепим к плоскости пластины по оси y бесконечное ребро жёсткости, к которому в точке $y = 0$ приложена сосредоточенная сила $2P$, направленная вдоль его оси. Будем считать, что $Y(y)$ – это неизвестные усилия взаимодействия между ребром и пластиной и найдём $Y(y)$ из условия равновесия элементарного участка ребра. Подставив $Y(y)$ в полученные формулы для неоднородной задачи, получим решение для неограниченной пластины с бесконечным ребром, к которому приложена осевая нагрузка $2P$. Отделим верхнюю полуплоскость от нижней и заменим её действие на нижнюю касательными напряжениями, взятыми с обратным знаком из решения задачи для неограниченной пластины с бесконечным ребром жёсткости (нормальные напряжения $\sigma_y(x,0) = 0$ в силу нечётной симметрии задачи относительно оси x). В результате получим требуемое решение.

3.2 Решение неоднородной задачи для неограниченной плоскости

Построим решение неоднородной задачи для неограниченной плоскости (рисунок 3.2). Для этого воспользуемся уравнениями равновесия в перемещениях [Власов, 1975]:

$$\begin{aligned} \frac{2}{1-\nu} \frac{\partial^2 U(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U(x, y)}{\partial y^2} + \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\partial^2 V(x, y)}{\partial x \partial y} &= 0; \\ \frac{2}{1-\nu} \frac{\partial^2 V(x, y)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V(x, y)}{\partial x^2} + \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\partial^2 U(x, y)}{\partial x \partial y} &= 2Y(y)\delta(x). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Здесь $U(x, y) = Gu(x, y)$; $V(x, y) = Gv(x, y)$, где $u(x, y)$ и $v(x, y)$ – перемещения в пластине в направлении осей x и y , соответственно; G – модуль сдвига; ν – коэффициент Пуассона; $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака; $2Y(y)\delta(x)$ – поверхностная нагрузка, действующая в сечении $x=0$ вдоль оси y . Можно считать, что, в общем, $Y(y)$ – чётная кусочно-непрерывная функция.

Введём функцию $\Phi(x, y)$ по формулам:

$$\begin{aligned} U(x, y) &= \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \Phi(x, y); \\ V(x, y) &= - \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} \Phi(x, y) + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \Phi(x, y) \right]. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Тогда из (3.1) получим уравнение:

$$\left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right) \Phi(x, y) = 2Y(y)\delta(x). \quad (3.3)$$

Применяя к нему преобразования Фурье по переменным x (с параметром преобразования λ) и y (с параметром преобразования t) и, обозначая $Y(t)$ – преобразование Фурье функции $Y(y)$, вместо дифференциального уравнения в частных производных (3.3) получим алгебраическое уравнение относительно функции $\Phi(\lambda, t)$ – преобразования Фурье функции $\Phi(x, y)$ по двум переменным

$$(\lambda^4 + 2\lambda^2 t^2 + t^4)\Phi(\lambda, t) = 2Y(t). \quad (3.4)$$

Решив его, найдём

$$\Phi(\lambda, t) = \frac{Y(t)}{(\lambda^2 + t^2)^2}. \quad (3.5)$$

Тогда обратное преобразование Фурье, где i – мнимая единица, будет следующим:

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ity} dt \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Y(t)}{(\lambda^2 + t^2)^2} e^{-i\lambda x} d\lambda. \quad (3.6)$$

С помощью соотношений закона Гука найдём формулы для напряжений, выраженные через функцию $\Phi(x, y)$:

$$\begin{aligned} \sigma_x(x, y) &= -\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \Phi(x, y); \\ \sigma_y(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} \left((2 + \nu) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \Phi(x, y); \\ \tau_{xy}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \Phi(x, y). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Подставляя (3.6) в (3.2) и (3.7), получим решение неоднородной задачи для неограниченной плоскости. Обозначим его индексами « p » сверху:

$$\begin{aligned} \sigma_x^p(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\nu t^2 - \lambda^2}{(t^2 + \lambda^2)^2} t Y(t) \sin ty \cos \lambda x d\lambda dt; \\ \sigma_y^p(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} t \frac{(2 + \nu)\lambda^2 + t^2}{(t^2 + \lambda^2)^2} Y(t) \sin ty \cos \lambda x d\lambda dt; \\ \tau_{xy}^p(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \frac{\nu t^2 - \lambda^2}{(t^2 + \lambda^2)^2} Y(t) \cos ty \sin \lambda x d\lambda dt; \\ U^p(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 + \nu}{2} \frac{t\lambda}{(t^2 + \lambda^2)^2} \widetilde{Y}(t) \sin ty \sin \lambda x d\lambda dt; \\ V^p(x, y) &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left(\lambda^2 + \frac{1 - \nu}{2} t^2 \right)}{(t^2 + \lambda^2)^2} \widetilde{Y}(t) \cos ty \cos \lambda x d\lambda dt. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Воспользовавшись справочником [Прудников, Брычков, Маричев, 2003а], вычислим внутренние интегралы:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\nu t^2 - \lambda^2}{(t^2 + \lambda^2)^2} \cos \lambda x d\lambda &= \frac{1}{4} \left[\frac{\nu - 1}{t} + (\nu + 1) |x| \right] e^{-t|x|}; \\
\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(2 + \nu)\lambda^2 + t^2}{(t^2 + \lambda^2)^2} \cos \lambda x d\lambda &= \frac{1}{4} \left[\frac{3 + \nu}{t} - (\nu + 1) |x| \right] e^{-t|x|}; \\
\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\nu \lambda t^2 - \lambda^3}{(t^2 + \lambda^2)^2} \sin \lambda x d\lambda &= \frac{1}{4} [(1 + \nu)tx - 2 \operatorname{sign} x] e^{-t|x|}; \\
\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 + \nu}{2} \frac{\lambda}{(t^2 + \lambda^2)^2} \sin \lambda x d\lambda &= \frac{1 + \nu}{8t} x e^{-t|x|}; \\
\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left(\lambda^2 + \frac{1 - \nu}{2} t^2 \right)}{(t^2 + \lambda^2)^2} \cos \lambda x d\lambda &= \frac{1}{4} \left[\frac{3 - \nu}{2t} - \frac{1 + \nu}{2} |x| \right] e^{-t|x|}.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Подставим (3.9) в (3.8). Учитывая чётность функции $Y(t)$, придём к таким формулам:

$$\begin{aligned}
\sigma_x^p(x, y) &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{\infty} Y(t) [(\nu - 1) + (\nu + 1)t |x|] e^{-t|x|} \sin ty dt; \\
\sigma_y^p(x, y) &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{\infty} Y(t) [(3 + \nu) - (1 + \nu)t |x|] e^{-t|x|} \sin ty dt; \\
\tau_{xy}^p(x, y) &= -\frac{1}{4\pi} \int_0^{\infty} Y(t) [(1 + \nu)tx - 2 \operatorname{sign} x] e^{-t|x|} \cos ty dt; \\
U^p(x, y) &= -\frac{1 + \nu}{8\pi} x \int_0^{\infty} Y(t) e^{-t|x|} \sin ty dt; \\
V^p(x, y) &= -\frac{1}{4\pi} \int_0^{\infty} Y(t) \left[\frac{3 - \nu}{2t} - \frac{1 + \nu}{2} |x| \right] e^{-t|x|} \cos ty dt.
\end{aligned} \tag{3.10}$$

При преобразованиях использовались следующие равенства для обобщённых функций [Кеч, Теодореску, 1978]:

$$\frac{d}{dx} \operatorname{sign} x = 2\delta(x); \quad \operatorname{sign} x^2 = 1; \quad x \operatorname{sign} x = |x|.$$

При $x = 0$

$$\delta(x) \operatorname{sign} x = 0; \quad x \operatorname{sign} x = 0.$$

3.3 Решение для неограниченной плоскости с бесконечным ребром жёсткости

Допустим, что упругая неограниченная плоскость непрерывно сцеплена с одномерным ребром постоянной жёсткости. К ребру вдоль его оси приложена сосредоточенная сила $2P$ (рисунок 3.3). Обозначим E_1 и f , соответственно, модуль упругости ребра и площадь его поперечного сечения. Коэффициенты Пуассона для ребра и пластины будем считать равными.

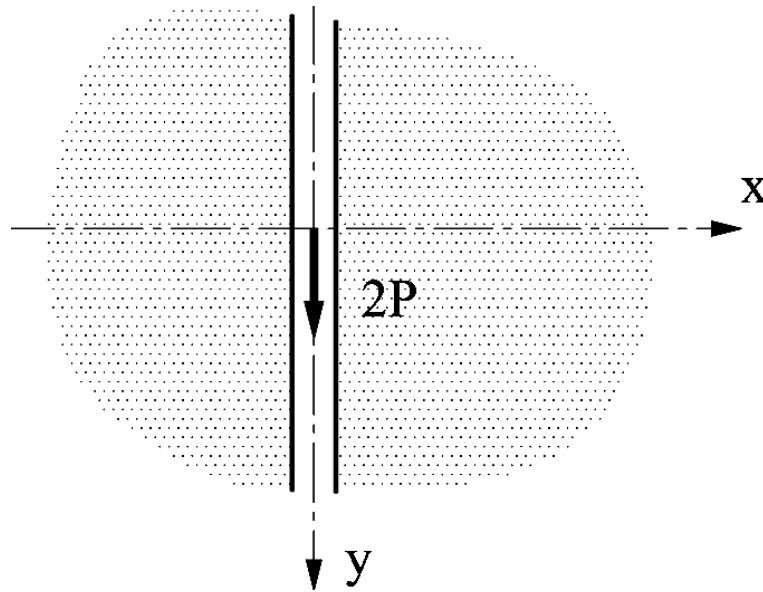


Рисунок 3.3 – Неограниченная плоскость с одномерным ребром жёсткости

Составим уравнение равновесия для элемента ребра dy (рисунок 3.4):

$$\frac{dN(y)}{dy} + 2\rho\tau_{xy}^p(0, y) + 2P\delta(y) = 0, \quad (3.11)$$

где $N(y)$ – сила в ребре, а ρ – толщина пластины.

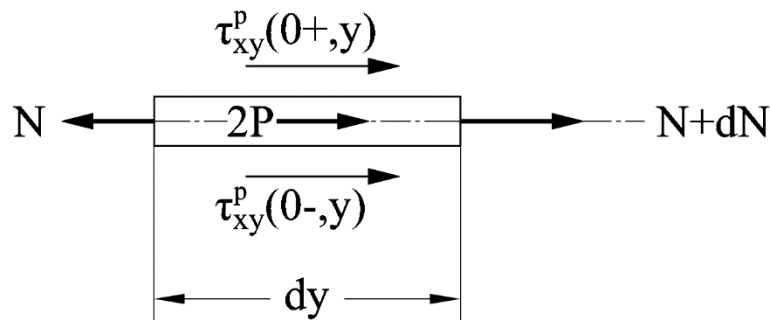


Рисунок 3.4 – Равновесие элемента ребра жёсткости

Отсюда, в соответствии с законом Гука, получим

$$\frac{E_1 f}{2\rho G} \frac{d^2 V^p(0, y)}{dy^2} + \tau_{xy}^p(0, y) + \frac{P}{\rho} \delta(y) = 0. \quad (3.12)$$

Подставляя сюда соответствующие формулы (3.10), получим

$$\frac{1}{4\pi} \int_0^\infty \left(\frac{3-\nu}{2} \frac{E_1 f}{2\rho G} t + 2 \right) Y(t) \cos ty dt = -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{P}{\rho} \cos ty dt \quad (3.13)$$

и, следовательно,

$$Y(t) = -\frac{4}{\frac{3-\nu}{2} \frac{E_1 f}{2\rho G} t + 2} \frac{P}{\rho}. \quad (3.14)$$

Введём новый параметр: $K = \frac{f}{S}$, где $S = 2\rho$. Тогда формулу (3.14) можно

представить так

$$Y(t) = -\frac{8K}{\frac{3-\nu}{2} \frac{E_1}{G} Kt + 2} \sigma_0, \quad (3.15)$$

где $\sigma_0 = \frac{P}{f}$.

3.4 Решение для полуплоскости с полубесконечным ребром жёсткости

Чтобы получить решение для полуплоскости с полубесконечным ребром жёсткости и со свободной от напряжений прямолинейной границей, отделим верхнюю полуплоскость по горизонтальной оси координат и приложим к оставшейся части, взятые с обратным знаком касательные напряжения (3.10), взятые при $y = 0+$ (напряжения $\sigma_y^p(x, 0)$, как можно видеть, здесь равны нулю). С этой целью воспользуемся методом начальных функций (МНФ) для полуплоскости [Власов, 1975; Matrosov и др., 2020].

Рассмотрим полуплоскость $\{|x| < \infty, y \geq 0\}$. Основные зависимости МНФ для полуплоскости в пространстве преобразований Фурье имеют вид [Matrosov и др., 2020]:

$$\begin{aligned}
U^{hp}(\lambda, y) &= L_{UY}^0(\lambda, y)Y_0 + L_{UX}^0(\lambda, y)X_0; \\
V^{hp}(\lambda, y) &= L_{VY}^0(\lambda, y)Y_0 + L_{VX}^0(\lambda, y)X_0; \\
\sigma_y^{hp}(\lambda, y) &= L_{YY}^0(\lambda, y)Y_0 + L_{YX}^0(\lambda, y)X_0; \\
\tau_{xy}^{hp}(\lambda, y) &= L_{XY}^0(\lambda, y)Y_0 + L_{XX}^0(\lambda, y)X_0; \\
\sigma_x^{hp}(\lambda, y) &= A_Y^0(\lambda, y)Y_0 + A_X^0(\lambda, y)X_0.
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Входящие сюда операторы МНФ в пространстве преобразований Фурье выглядят так:

$$\begin{aligned}
L_{YY}^0(\lambda, y) &= (1 + |\lambda|y)e^{-|\lambda|y}; \\
L_{YX}^0(\lambda, y) &= L_{XY}^0(\lambda, y) = i\lambda ye^{-|\lambda|y}; \\
L_{UY}^0(\lambda, y) &= \frac{i}{2\lambda} \left(\frac{1-\nu}{1+\nu} - |\lambda|y \right) e^{-|\lambda|y}; \\
L_{UX}^0(\lambda, y) &= - \left(\frac{1}{|\lambda|(1+\nu)} - \frac{1}{2}y \right) e^{-|\lambda|y}; \\
L_{VY}^0(\lambda, y) &= - \left(\frac{1}{|\lambda|(1+\nu)} + \frac{1}{2}y \right) e^{-|\lambda|y}; \\
L_{VX}^0(\lambda, y) &= - \frac{i}{2\lambda} \left(\frac{1-\nu}{1+\nu} + |\lambda|y \right) e^{-|\lambda|y}; \\
L_{XX}^0(\lambda, y) &= A_Y^0(\lambda, y) = (1 - |\lambda|y)e^{-|\lambda|y}; \\
A_X^0(\lambda, y) &= i \left(2 \frac{|\lambda|}{\lambda} - \lambda y \right) e^{-|\lambda|y}.
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Слева в равенствах (3.16) стоят преобразования Фурье перемещений и напряжений. Через Y_0, X_0 обозначены преобразования Фурье, заданных на границе полуплоскости $y=0$ начальных функций т.е., соответственно, нормальных и касательных напряжений. Согласно (3.8) и (3.9) они равны

$$Y_0 = 0, \quad X_0 = \frac{4\lambda(\lambda^2 - \nu t^2)}{(t^2 + \lambda^2)^2}. \tag{3.18}$$

Подставив их в (3.17), получим решение для полуплоскости, у которой на прямолинейной границе заданы касательные напряжения, равные $\tau_{xy}^p(x, 0-)$ (3.10), взятые с обратным знаком:

$$\begin{aligned}
\sigma_x^{hp}(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty Y(t) \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left(2 \frac{|\lambda|}{\lambda} - \lambda y \right) e^{-|\lambda|y} \frac{4\lambda(\lambda^2 - vt^2)}{(t^2 + \lambda^2)^2} \cos \lambda x d \lambda dt; \\
\sigma_y^{hp}(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty Y(t) \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \lambda y e^{-|\lambda|y} \frac{4\lambda(\lambda^2 - vt^2)}{(t^2 + \lambda^2)^2} \cos \lambda x d \lambda dt; \\
\tau_{xy}^{hp}(x, y) &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^\infty Y(t) \frac{1}{\pi} \int_0^\infty (1 - |\lambda| y) e^{-|\lambda|y} \frac{4\lambda(\lambda^2 - vt^2)}{(t^2 + \lambda^2)^2} \sin \lambda x d \lambda dt; \\
U^{hp}(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \widetilde{Y(t)} \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left(\frac{1}{|\lambda|(1+v)} - \frac{y}{2} \right) e^{-|\lambda|y} \frac{4\lambda(\lambda^2 - vt^2)}{(t^2 + \lambda^2)^2} \sin \lambda x d \lambda dt; \\
V^{hp}(x, y) &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \widetilde{Y(t)} \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{2\lambda} \left(\frac{1-v}{1+v} + |\lambda| y \right) e^{-|\lambda|y} \frac{4\lambda(\lambda^2 - vt^2)}{(t^2 + \lambda^2)^2} \cos \lambda x d \lambda dt.
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Складывая (3.10) и (3.19), получим решение задачи для полуплоскости с полубесконечным ребром жёсткости, в вершине которого в направлении оси y действует сосредоточенная сила $P = \sigma_0 f$:

$$\begin{aligned}
\sigma_x(x, y) &= \sigma_x^p(x, y) + \sigma_x^{hp}(x, y); \quad \sigma_y(x, y) = \sigma_y^p(x, y) + \sigma_y^{hp}(x, y); \\
\tau_{xy}(x, y) &= \tau_{xy}^p(x, y) + \tau_{xy}^{hp}(x, y); \\
U(x, y) &= U^p(x, y) + U^{hp}(x, y); \quad V(x, y) = V^p(x, y) + V^{hp}(x, y).
\end{aligned} \tag{3.20}$$

В эти формулы надо подставить выражения (3.14) или (3.15) для получения окончательных зависимостей.

Найдём формулы для напряжений $\sigma_0(y)$ в ребре. Проинтегрируем уравнение (3.11) от 0 до y . Обозначая

$$\sigma_0(y) = \frac{N(y)}{f} \tag{3.21}$$

и учитывая, что согласно (3.10), а затем (3.15)

$$\tau_{xy}^p(0, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty Y(t) \cos ty dt = -\frac{4K\sigma_0}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos ty dt}{\frac{3-v}{2} \frac{E_1}{G} Kt + 2} \tag{3.22}$$

получим

$$\sigma_0(y) - \sigma_0 = \frac{1}{K} \int_0^y \tau_{xy}^p(0, y) dy = \frac{4\sigma_0}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{\frac{3-v}{2} \frac{E_1}{G} Kt + 2} \frac{\sin ty}{t} dt, \tag{3.23}$$

где $\sigma_0 = \sigma_0(0) = \frac{N(0)}{f} = \frac{P}{f}$. Изменим знак у напряжений σ_0 и будем считать далее $\sigma_0 > 0$. Тогда можно записать

$$\sigma_0(y) = -\sigma_0 - \frac{\sigma_0}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{4}{\frac{E_1}{G} \frac{3-\nu}{2} Kt+2} \frac{\sin ty}{t} dt. \quad (3.24)$$

3.5 Преобразование формул при $x = 0$

Приведём формулы для касательных напряжений при $x=0$, а также напряжений и перемещений в ребре жёсткости – сваи, сделав их более удобными для вычислений.

Обозначим

$$D = \frac{E_1}{G}, \quad b = \frac{2}{\frac{3-\nu}{2} DK} = \frac{4}{(3-\nu)DK}. \quad (3.25)$$

Тогда, замечая, что $\tau_{xy}^{hp}(0, y) = 0$, получим

$$\tau_{xy}(0, y) = -\frac{4K\sigma_0}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos ty dt}{\frac{3-\nu}{2} DKt+2} \quad (3.26)$$

или

$$\tau_{xy}(0, y) = -\frac{16\sigma_0}{2\pi(3-\nu)D} \int_0^{\infty} \frac{\cos ty dt}{t+b}. \quad (3.27)$$

Воспользовавшись [Прудников, Брычков, Маричев, 2003а], эту формулу можно записать так

$$\tau_{xy}(0, y) = \frac{16\sigma_0}{2\pi(3-\nu)D} [\text{ci}(by) \cos by + \text{si}(by) \sin by] \quad (3.28)$$

здесь через [Лебедев, 1963]

$$\begin{aligned} \text{ci}(z) = \text{Ci}(z) &= -\int_z^{\infty} \frac{\cos t}{t} dt = \gamma + \ln z + \int_0^z \frac{\cos t - 1}{t} dt; \\ \text{si}(z) = \text{Si}(z) &= \frac{\pi}{2} - \int_0^z \frac{\sin t}{t} dt - \frac{\pi}{2}, \end{aligned} \quad (3.29)$$

соответственно, интегральные косинус и синус, $\gamma = 0.577$ – постоянная Эйлера. Формулы (3.29) используются при вычислении интегральных косинуса и синуса.

Проинтегрируем (3.28) от 0 до y . Учитывая, что [Прудников, Брычков, Маричев, 2003b]

$$\begin{aligned} \int_0^y \text{ci}(by) \cos by dy &= \frac{1}{b} \text{ci}(by) \sin by - \frac{1}{2b} \text{si}(2by); \\ \int_0^y \text{si}(by) \sin by dy &= -\frac{1}{b} \text{si}(by) \cos by + \frac{1}{2b} \text{si}(2by), \end{aligned} \quad (3.30)$$

получим (см. первый интеграл в (3.23))

$$\frac{1}{K} \int_0^y \tau_{xy}^p(0, y) dy = \frac{16\sigma_0}{2\pi(3-\nu)DKb} [\text{si}(by) \cos by - \text{ci}(by) \sin by] \quad (3.31)$$

или, учитывая (3.25),

$$\sigma_0(y) = \frac{2\sigma_0}{\pi} [\text{si}(by) \cos by - \text{ci}(by) \sin by]. \quad (3.32)$$

Заметим, что при $y = 0$

$$\text{ci}(by) \sin by = 0, \quad \text{si}(by) \cos by = -\frac{\pi}{2}, \quad (3.33)$$

поэтому $\sigma_0(0) = -\sigma_0$.

Формулу для перемещений в ребре жёсткости получим, воспользовавшись законом Гука для ребра:

$$\sigma_0(y) = \frac{E_1}{G} \frac{d(Gv(y))}{dy}. \quad (3.34)$$

Откуда найдём

$$v(y) = \frac{2\sigma_0}{\pi E_1} \int_0^y [\text{si}(by) \cos by - \text{ci}(by) \sin by] dy. \quad (3.35)$$

Согласно [Прудников, Брычков, Маричев, 2003b]

$$\int_0^y \text{si}(by) \cos by dy = \frac{1}{2b} [\text{ci}(2by) + 2 \text{si}(by) \sin by - \ln by - \ln 2 - \gamma];$$

$$\int_0^y \text{ci}(by) \sin by dy = \frac{1}{2b} [\text{ci}(2by) - 2 \text{ci}(by) \cos by + \ln by - \ln 2 + \gamma].$$
(3.36)

Подставляя (3.36) в (3.35), получим формулу для перемещений в ребре:

$$v(y) = \frac{\sigma_0}{G} \frac{3-\nu}{2\pi} K [\text{si}(by) \sin by + \text{ci}(by) \cos by - \ln by - \gamma] \quad (3.37)$$

или

$$v(y) = -\frac{2\sigma_0}{\pi E_1 b} [\text{si}(by) \sin by + \text{ci}(by) \cos by - \ln by - \gamma]. \quad (3.38)$$

Заметим, что функция (3.37) не имеет логарифмической особенности при $y=0$ в силу представления (3.29) для $\text{ci}(by)$.

Для вычислений по формулам (3.28), (3.32), (3.35) следует воспользоваться интегральными представлениями (3.29) для входящих в них функций. В результате получим

$$\tau_{xy}(0, y) = \frac{16\sigma_0}{2\pi(3-\nu)D} \left\{ [\gamma + \ln by + \int_0^{by} \frac{\cos t - 1}{t} dt] \cos by + \left[\int_0^{by} \frac{\sin t}{t} dt - \frac{\pi}{2} \right] \sin by \right\};$$

$$\sigma_0(y) = \frac{2\sigma_0}{\pi} \left\{ \left[\int_0^{by} \frac{\sin t}{t} dt - \frac{\pi}{2} \right] \cos by - [\gamma + \ln by + \int_0^{by} \frac{\cos t - 1}{t} dt] \sin by \right\};$$

$$v(y) = -\frac{2\sigma_0}{\pi E_1 b} \left\{ (\ln by + \gamma)(\cos by - 1) + \left[\int_0^{by} \frac{\sin t}{t} dt - \frac{\pi}{2} \right] \sin by + \int_0^{by} \frac{\cos t - 1}{t} dt \cos by \right\}.$$
(3.39)

Формулы (3.28), (3.32), (3.37) можно выразить через элементарные функции, если воспользоваться асимптотическими представлениями для входящих в них функций $\text{ci}(z), \text{si}(z)$ [Лебедев, 1963]:

при малых значениях переменной y

$$\begin{aligned} \text{ci}(by) &= \gamma + \ln by + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (by)^{2k}}{2k(2k)!}; \\ \text{si}(by) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (by)^{2k+1}}{(2k+1)(2k+1)!}. \end{aligned} \quad (3.40)$$

при больших значениях y

$$\begin{aligned} \text{ci}(by) &= \frac{\sin by}{by} P(y) - \frac{\cos by}{by} Q(y); \\ \text{si}(by) &= -\frac{\cos by}{by} P(y) - \frac{\sin by}{by} Q(y), \end{aligned} \quad (3.41)$$

где

$$P(y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k)!}{(by)^{2k}}; \quad Q(y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k+1)!}{(by)^{2k+1}}. \quad (3.42)$$

Тогда в формулах (3.28), (3.38) и (3.32),

$$\text{ci}(by) \cos by + \text{si}(by) \sin by = -\frac{Q(y)}{by}, \quad (3.43)$$

а в формуле (3.32)

$$\text{si}(by) \cos by - \text{ci}(by) \sin by = -\frac{P(y)}{by}. \quad (3.44)$$

В асимптотических представлениях для функций (3.28), (3.32), (3.38), справедливых при больших значениях y , обычно достаточно не более двух членов рядов (3.42), а в асимптотических представлениях при малых значениях переменной y – не более четырёх членов рядов (3.40). Приведём их явные представления:

$$\begin{aligned} P(y) &\approx \sum_{k=0}^3 \frac{(-1)^k (2k)!}{(by)^{2k}} = 1 - \frac{2}{(by)^2} + \frac{24}{(by)^4} - \frac{720}{(by)^6}; \\ Q(y) &\approx \sum_{k=0}^3 \frac{(-1)^k (2k+1)!}{(by)^{2k+1}} = \frac{1}{by} - \frac{6}{(by)^3} + \frac{120}{(by)^5} - \frac{5040}{(by)^7}. \end{aligned} \quad (3.45)$$

3.6 Асимптотические представления

В общем случае решение рассматриваемой задачи описывается формулами (3.10), (3.15), (3.19) и (3.20). В частности, формула для касательных напряжений в развёрнутом виде будет следующей:

$$\begin{aligned} \tau_{xy}(x, y) = & -\frac{1}{4\pi} \int_0^{\infty} Y(t, K, D) [(1 + \nu)xt - 2\text{sign}(x)] e^{-t|x|} \cos(ty) dt + \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} Y(t, K, D) \cos(ty) \int_0^{\infty} (1 + |\lambda| y) \frac{4(\nu\lambda t^2 - \lambda^3)}{(t^2 + \lambda^2)} e^{-y|\lambda|} \sin \lambda x d\lambda dt, \end{aligned} \quad (3.46)$$

где

$$Y(t) = -\frac{8K}{\frac{3-\nu}{2}DKt + 2} \sigma_0; \quad D = \frac{E_1}{G}; \quad K = \frac{f}{S}. \quad (3.47)$$

При $x=0$ формулы можно упростить и получить для них асимптотические представления, выраженные через элементарные функции. В диссертации эти формулы приводятся для трех наиболее значимых факторов: для касательных напряжений по месту стыка ребра и пластины $\tau_{xy}(0, y)$, для напряжений $\sigma_0(y)$ и для перемещений $v(y)$ в ребре жёсткости. Приведём эти формулы.

(1) Для касательных напряжений $\tau_{xy}(0, y)$

$$\tau_{xy}(0, y) = \frac{16\sigma_0}{2\pi(3-\nu)D} [\text{ci}(by) \cos by + \text{si}(by) \sin by]; \quad (3.48)$$

$$\begin{aligned} \tau_{xy}(0, y) = & \frac{16\sigma_0}{2\pi(3-\nu)D} \left\{ [\gamma + \ln by + \int_0^{by} \frac{\cos t - 1}{t} dt] \cos by + \right. \\ & \left. + [\int_0^{by} \frac{\sin t}{t} dt - \frac{\pi}{2}] \sin by \right\}. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Эти формулы эквивалентны. Вторая используется в том случае, когда в математических программах с символьной математикой нет встроенных интегральных синуса и косинуса.

Асимптотическая формула для касательных напряжений имеет вид:

$$\tau_{xy}(0, y) \approx \frac{16\sigma_0}{2\pi(3-\nu)D} \begin{cases} g(y) & (0 < y < \alpha) \\ f(y) & (20 > y > \alpha) \end{cases} \quad (3.50)$$

где

$$g(y) = \left[\gamma + \ln by - \frac{(by)^2}{4} + \frac{(by)^4}{96} - \frac{(by)^6}{4320} \right] \cos by + \left[yb - \frac{(by)^3}{18} - \frac{\pi}{2} \right] \sin by; \quad (3.51)$$

$$f(y) = -\frac{1}{b^2 y^2}.$$

Выражение для $g(y)$ получается из формулы (3.48) с использованием (3.40). Количество взятых членов рядов (3.40) выбирается из условия достаточно надёжной аппроксимации функции (3.48) при малых значениях переменной y . Выражение для $f(y)$ получается из формулы (3.43), если в разложении (3.42) для $Q(y)$ оставить лишь первое слагаемое. Параметр α в формуле (3.50) определяется из решения трансцендентного уравнения $g(y) = f(y)$ и он зависит от конкретной задачи, характеризуемой параметрами K и D .

(2) Для напряжений в ребре жёсткости

Аналогами формул (3.48) – (3.50) будут следующие:

$$\sigma_0(y) = \frac{2\sigma_0}{\pi} [\text{si}(by)\cos by - \text{ci}(by)\sin by]; \quad (3.52)$$

$$\sigma_0(y) = \frac{2\sigma_0}{\pi} \left\{ \left[\int_0^{by} \frac{\sin t}{t} dt - \frac{\pi}{2} \right] \cos by - \left[\gamma + \ln by + \int_0^{by} \frac{\cos t - 1}{t} dt \right] \sin by \right\}; \quad (3.53)$$

$$\sigma_0(y) \approx \frac{2\sigma_0}{\pi} \begin{cases} g(y) & (0 < y < \alpha) \\ f(y) & (20 > y > \alpha) \end{cases} \quad (3.54)$$

где

$$g(y) = \left[\gamma + \ln by - \frac{(by)^2}{4} + \frac{(by)^4}{96} - \frac{(by)^6}{4320} \right] \sin by + \left[yb - \frac{(by)^3}{18} + \frac{(by)^5}{600} - \frac{\pi}{2} \right] \cos by; \quad (3.55)$$

$$f(y) = -\frac{1}{by}.$$

Выражение для $f(y)$ (3.55) получается из формулы (3.44), если в разложении для $P(y)$ оставить только первый член ряда. Параметр α , как было сказано ранее,

определяется из решения трансцендентного уравнения $g(y) = f(y)$ и также зависит от параметров K и D .

(3) Для перемещений в ребре

$$v(y) = -\frac{2\sigma_0}{\pi E_1 b} [\text{si}(by) \sin by + \text{ci}(by) \cos by - \ln by - \gamma]; \quad (3.56)$$

$$v(y) = -\frac{2\sigma_0}{\pi E_1 b} \{ (\ln by + \gamma)(\cos by - 1) + \\ + \left[\int_0^{by} \frac{\sin t}{t} dt - \frac{\pi}{2} \right] \sin by + \int_0^{by} \frac{\cos t - 1}{t} dt \cos by \}. \quad (3.57)$$

Асимптотическую формулу приведём только для малых значений переменной y .

$$v(y) \approx \frac{2\sigma_0}{\pi E_1 b} \left\{ \left[\frac{(by)^2}{4} - \frac{(by)^4}{96} + \frac{(by)^6}{4320} - \frac{(by)^8}{332560} \right] \cos by - \right. \\ \left. - \left[by - \frac{(by)^3}{18} + \frac{(by)^5}{600} - \frac{(by)^7}{35280} + \frac{(by)^9}{3265920} - \frac{\pi}{2} \right] \sin by - \right. \\ \left. - (\gamma + \ln by)(\cos by - 1) \right\}. \quad (3.58)$$

3.7 Сравнение аналитических и численных решений

В работе были рассмотрены восемь примеров: две сваи с радиусом $R = 0.5$ м и $R = 1$ м, полностью заглублённые в скальные грунты от сильнодеформируемых до очень слабодеформируемых, с модулем деформации массива $E = 2000 \cdot 10^4$, $E = 1000 \cdot 10^4$, $E = 500 \cdot 10^4$ и $E = 200 \cdot 10^4$ кПа. Модуль упругости сваи примем равным $E_1 = 300 \cdot 10^5$ кПа. Длина сваи – 20 м. Коэффициент Пуассона для сваи и грунта $\nu = 0.3$. К голове сваи приложена сжимающая равномерно распределённая нагрузка $\sigma_0 = 20\,000$ кПа. Таким образом, в аналитическом решении параметр K для цилиндрической сваи принимает значения

$$K = \frac{f}{S} = \frac{\pi R^2}{2\pi R} = \frac{R}{2}.$$

Следовательно, $K = 0.25$, когда $R = 0.5$ м, и $K = 0.5$, когда $R = 1$ м.

Параметр

$$D = \frac{E_1}{G} \left(G = \frac{E}{2(1+\nu)} \right)$$

принимает значения

$$D = 3.9; 8; 16; 40 .$$

Численные решения получены на основе МКЭ в ПК ZSoil в условиях пространственной (трёхмерной) задачи в упругой постановке. Расчётная область представляла собой прямоугольный параллелепипед – массив, в центре которого моделируется цилиндрическое включение – свая. Вокруг сваи, где происходит основное изменение напряженно-деформированного состояния породного массива, сетка конечных элементов имеет сгущение. Размеры геометрической модели назначались с целью исключения влияния границ расчётной области на работу сваи. Расстояние от подошвы сваи до нижней границы расчётной области составляет 10 м.

При выполнении численных расчётов назначались следующие граничные условия по закреплениям: на поверхности расчётной области – свободное перемещение узлов по всем направлениям; на боковых границах – свободное перемещение в вертикальном направлении и запрет на горизонтальные перемещения; снизу – запрет перемещений по всем направлениям. На границе контакта «свая – скальный грунт» принимались идеальные контактные условия.

Общий вид расчётной модели – сваи, взаимодействующей со скальными массивом, представлен на рисунке 3.5. По результатам расчётов было определено напряженно-деформированное состояние системы «свая – породный массив». *Результаты численных расчётов представлены в приложении А.*

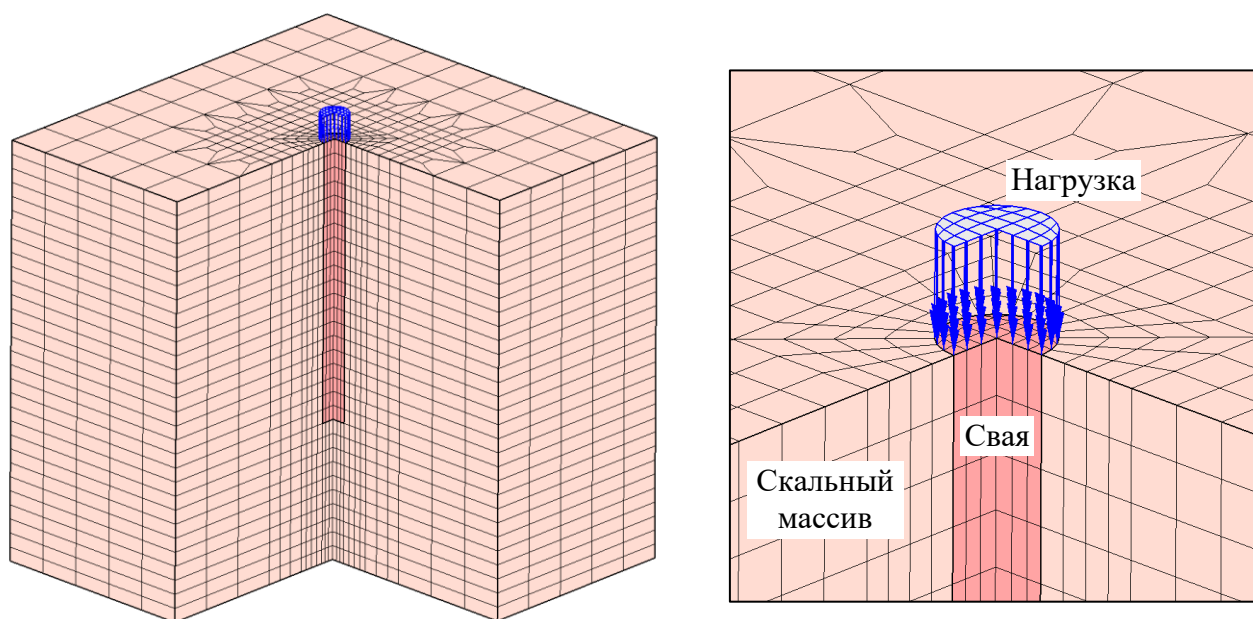


Рисунок 3.5 – Пространственная модель. Показана изометрия с вырезом ближней четверти

Ниже приводятся три серии графиков для касательных напряжений $\tau_{xy}(0, y)$, нормальных напряжений в свае $\sigma_0(y)$ и перемещений $v(y)$ в свае в зависимости от радиуса сваи (параметр K или R) и отношения модуля упругости сваи к модулю сдвига массива (параметр D).

Следует иметь в виду, что в численной модели свая имеет конечные размеры (задаются её длина и радиус), верх которой нагружен распределённой нагрузкой, а в аналитической – она моделируется полубесконечным стержнем, на который действует сосредоточенная сила. Поэтому между аналитическими и численными решениями могут быть некоторые расхождения.

Определить компоненты напряжений по границе боковой поверхности сваи при $x=0$ в численных решениях не представлялось возможным, т.к. значения напряжений численных в расчётах МКЭ выдаются в точках интегрирования элементов, а не в их узлах. Однако, анализ показывает, что аналитические решения в сечениях $x=0$ (боковая поверхность сваи) и $x=0.125(K=0.25)$, $x=0.25(K=0.5)$ (ближайшие точки интегрирования) не сильно отличаются. Поэтому соответствующие графики приводятся при $x=0.125$, $x=0.25$.

На рисунках 3.6 – 3.13 представлены графики распределения касательных напряжений по боковой поверхности свай. На каждом полотне представлены по две кривые: *сплошным* кривым соответствуют аналитические решения, *пунктирным* – численные. При построении графиков использовались формулы (3.46) и (3.47).

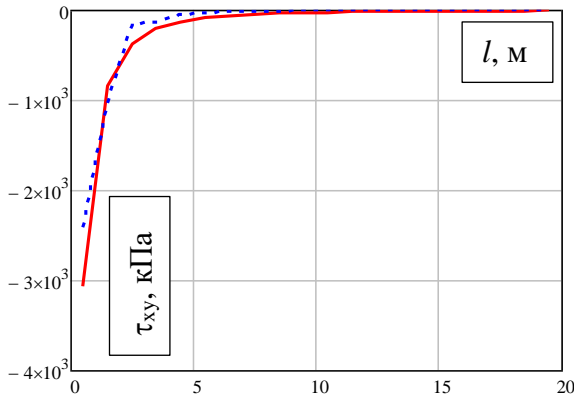


Рисунок 3.6 – Распределение касательных напряжений
 $x = 0.125, K = 0.25, D = 3.9$

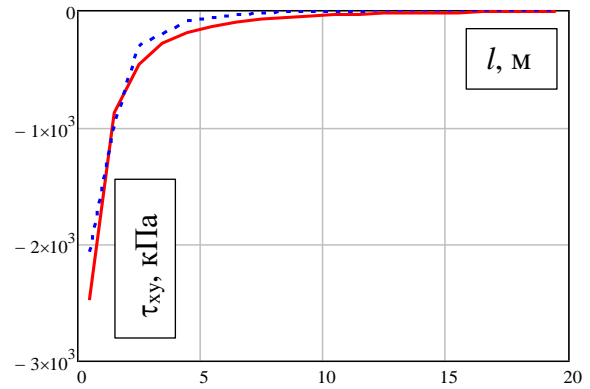


Рисунок 3.7 – Распределение касательных напряжений
 $x = 0.125, K = 0.25, D = 8$

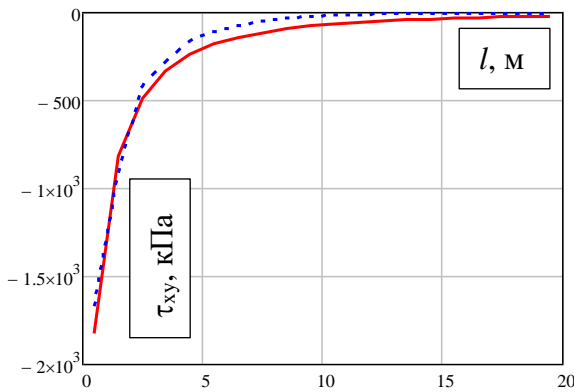


Рисунок 3.8 – Распределение касательных напряжений
 $x = 0.125, K = 0.25, D = 16$

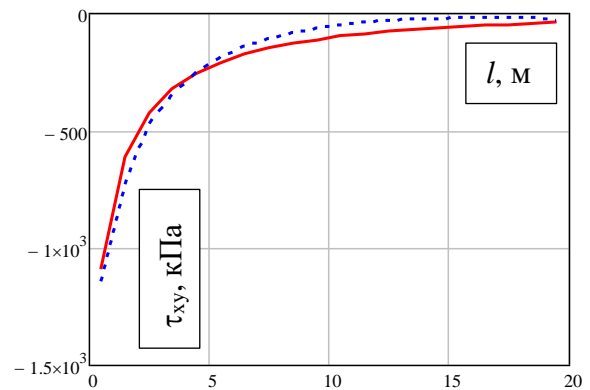


Рисунок 3.9 – Распределение касательных напряжений
 $x = 0.125, K = 0.25, D = 40$

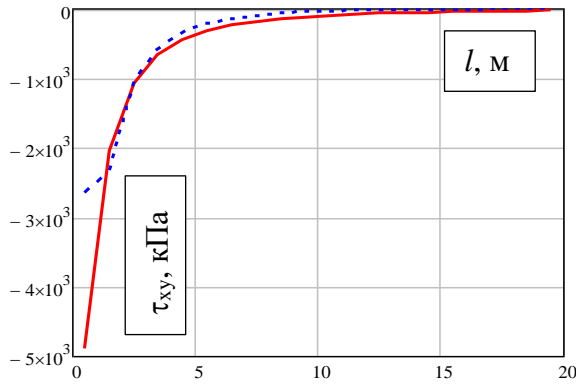


Рисунок 3.10 – Распределение касательных напряжений
 $x = 0.25, K = 0.5, D = 4$

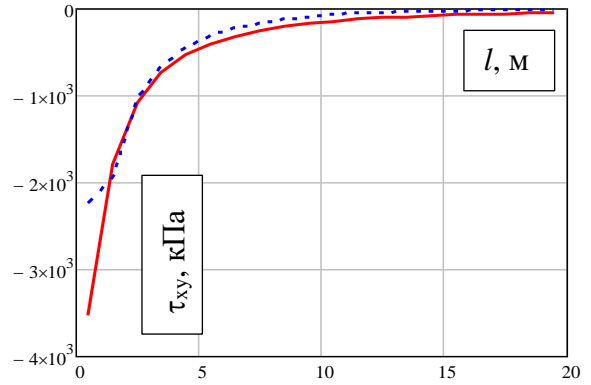


Рисунок 3.11 – Распределение касательных напряжений
 $x = 0.25, K = 0.5, D = 8$

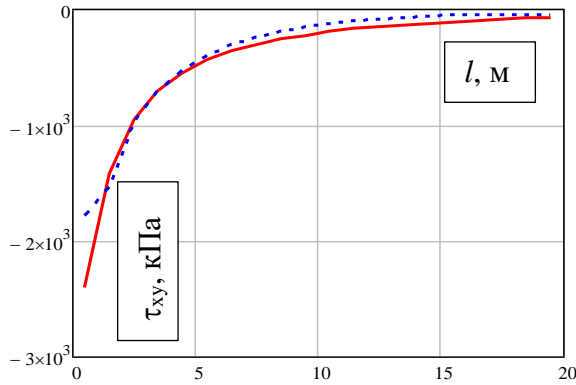


Рисунок 3.12 – Распределение касательных напряжений
 $x = 0.25, K = 0.5, D = 16$

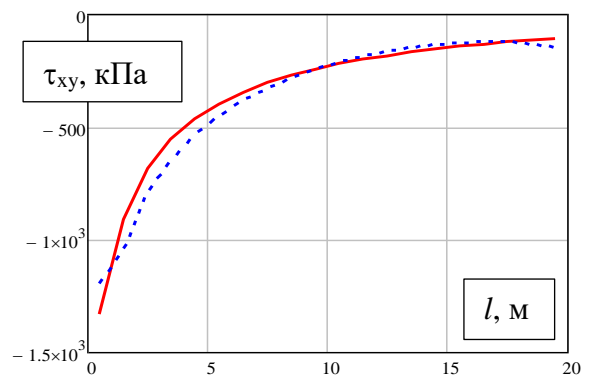


Рисунок 3.13 – Распределение касательных напряжений
 $x = 0.25, K = 0.5, D = 40$

Согласно формуле (3.49), касательные напряжения при $x = y = 0$ имеют логарифмическую особенность. Этим объясняется опережающий рост кривых, соответствующих аналитическому решению по сравнению с численным в окрестности нуля. В рассмотренных примерах это наиболее заметно при радиусе сваи $R = 1$ м. Однако с ростом параметра D , т.е. с уменьшением относительной жёсткости массива, это различие уменьшается. Также из графиков видно, что при уменьшении радиуса сваи разница между аналитическим и численным решениями уменьшается и становится незначительной. Это следствие того, что свая в численном решении при уменьшении её радиуса более соответствует стержневому элементу, которым она принималась в аналитическом решении. По той же самой причине, если увеличивать длину сваи численные и аналитические решения будут

сближаться. Из вышеприведённого анализа и рисунков 3.6 – 3.13 можно сделать вывод, что аналитические решения хорошо (с достаточной точностью) аппроксимируют численные решения и могут быть использованы в расчётах длинных свай при определении касательных напряжений, действующих по боковой поверхности.

Далее, дадим сравнение аналитических и численных решений для нормальных вертикальных напряжений в свае $\sigma_0(y)$. Результаты расчётов показали значительное расхождение между полученными аналитически и численно значениями нормальных напряжений. Причины этого были указаны выше. Можно попытаться исправить такое положение введением поправочного коэффициента β , с целью корректировки аналитического решения. Этот коэффициент позволит учесть пространственную работу сваи конечной длины. В этом решении используется параметр K , который определяется геометрией сваи. В наших расчётах – это отношением площади сечения сваи к её диаметру. Подправленные нормальные напряжения в свае будем определять по тем же формулам, что и до этого, но вместо коэффициента K подставим произведение βK . Тогда коэффициент b в формулах (3.59), (3.60) – (3.61) будет определяться следующим образом:

$$\frac{b}{\beta} = \frac{4}{(3-\nu)D\beta K}. \quad (3.62)$$

Анализ показывает, что можно принять $\beta = 2$. Поэтому при вычислениях будем считать далее, что далее $K = R/4$, т.е. для $R = 0.5$ м получим $K = 0.125$, а для $R = 1$ м получим $K = 0.25$. Ниже даётся сравнение численных и аналитических решений.

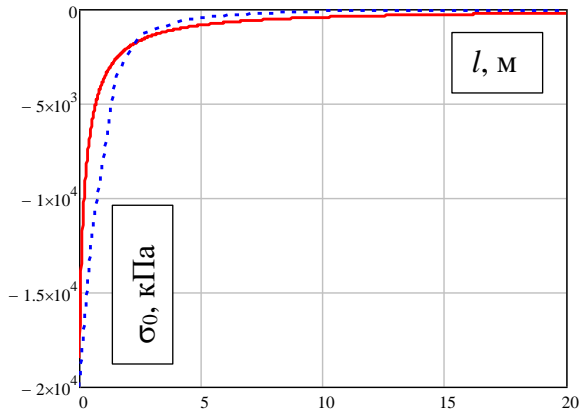


Рисунок 3.14 – Распределение нормальных напряжений в свае
 $K = 0.125, D = 3.9$

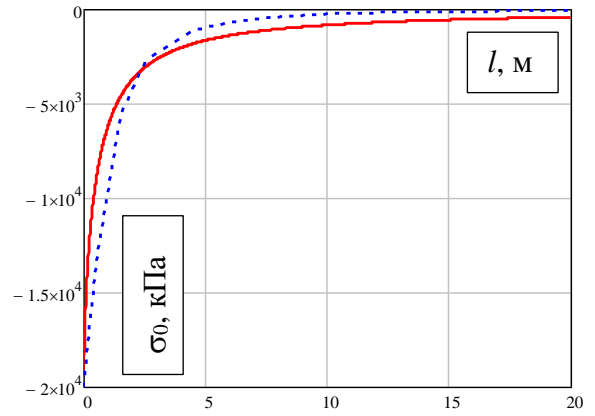


Рисунок 3.15 – Распределение нормальных напряжений в свае
 $K = 0.125, D = 8$

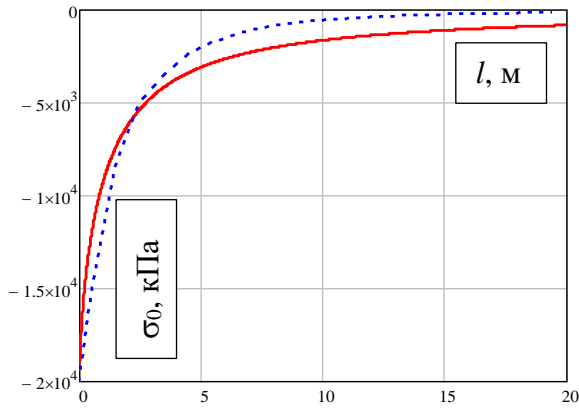


Рисунок 3.16 – Распределение нормальных напряжений в свае
 $K = 0.125, D = 16$

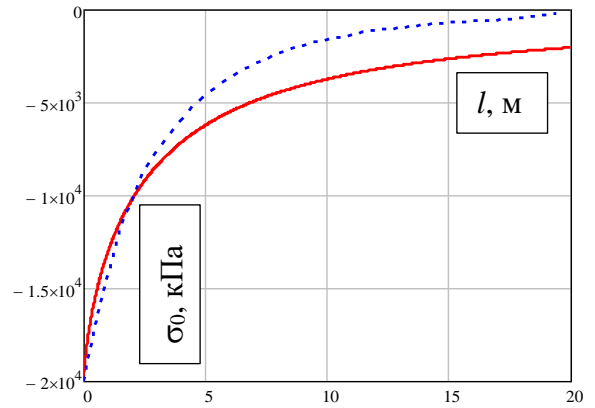


Рисунок 3.17 – Распределение нормальных напряжений в свае
 $K = 0.125, D = 40$

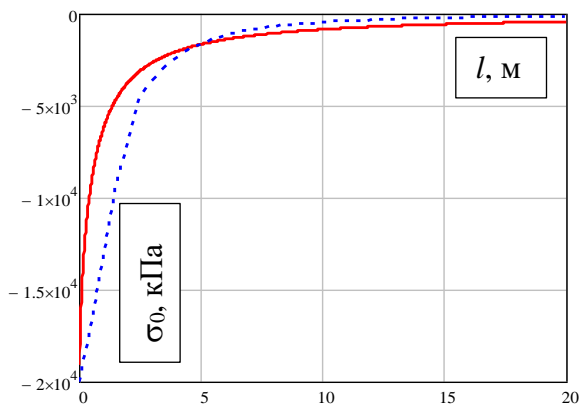


Рисунок 3.18 – Распределение нормальных напряжений в свае
 $K = 0.25, D = 3.9$

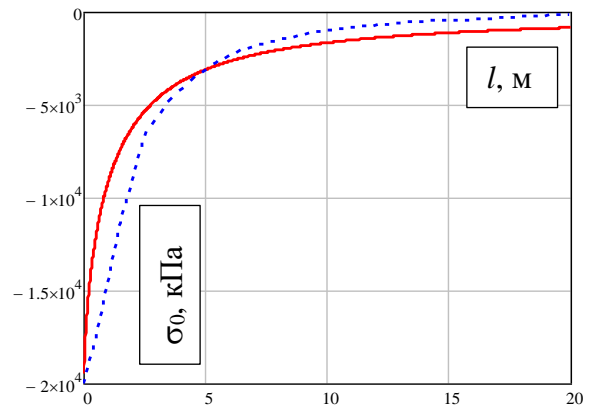


Рисунок 3.19 – Распределение нормальных напряжений в свае
 $K = 0.25, D = 8$

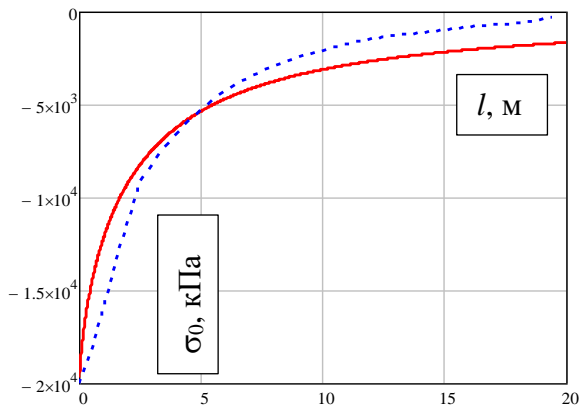


Рисунок 3.20 – Распределение нормальных напряжений в свае
 $K = 0.25, D = 16$

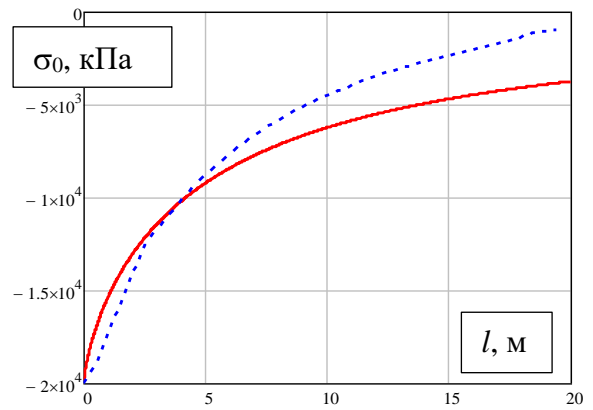


Рисунок 3.21 – Распределение нормальных напряжений в свае
 $K = 0.25, D = 40$

Из графиков на рисунках 3.14 – 3.21 видно, что по мере уменьшения модуля деформации массива (увеличение параметра D) численные решения всё хуже согласуются с аналитическими во второй половине длины сваи. Можно увеличивать β , добиваясь лучшего совпадения кривых во второй половине длины сваи, но при этом совпадение аналитического и численного решений в начале сваи будет хуже. Это несовершенство аналитического решения нельзя исправить в рамках рассматриваемой двумерной модели полубесконечного ребра в полуплоскости. Нужна более строгая модель для ребра конечной длины в полуплоскости, а ещё лучше – для ребра в полосе конечной ширины.

Далее, сравним значения перемещений в свае для аналитического и численного решений.

На графиках 3.22 – 3.25 представлены результаты расчётов, где радиус сваи принимался равным $R = 0.5$ м, а на графиках 3.26 – 3.29 значение радиуса принималось $R = 1$ м. Для вычислений использовалась формула (3.38).

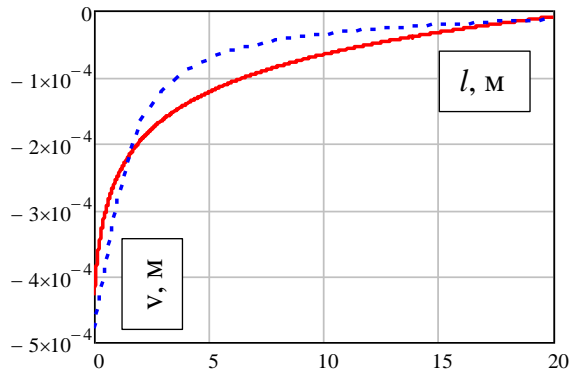


Рисунок 3.22 – Осадка сваи
 $R = 0.5, D = 3.9$

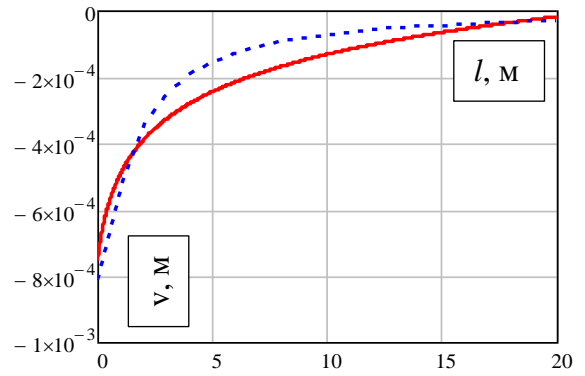


Рисунок 3.23 – Осадка сваи
 $R = 0.5, D = 8$

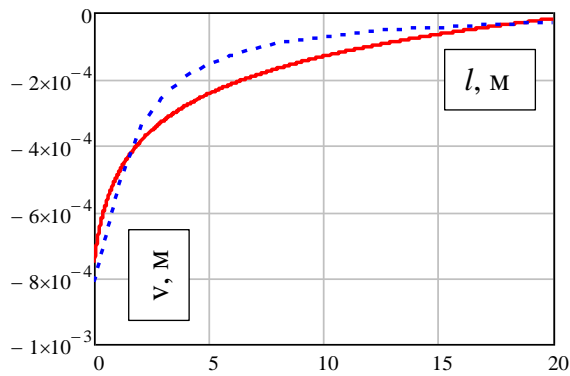


Рисунок 3.24 – Осадка сваи
 $R = 0.5, D = 16$

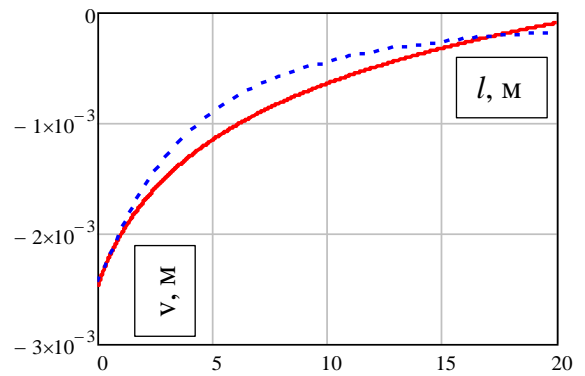


Рисунок 3.25 – Осадка сваи
 $R = 0.5, D = 40$

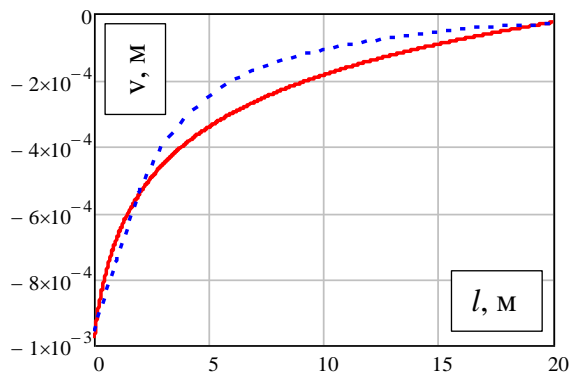


Рисунок 3.26 – Осадка сваи
 $R = 1, D = 3.9$

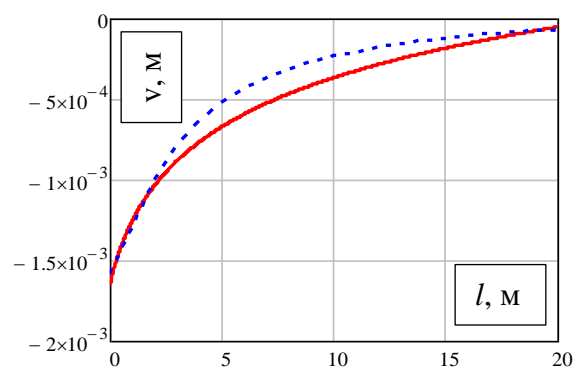


Рисунок 3.27 – Осадка сваи
 $R = 1, D = 8$

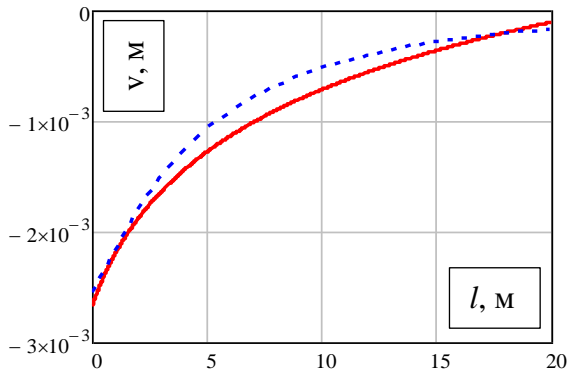


Рисунок 3.28 – Осадка сваи
 $R = 1, D = 16$

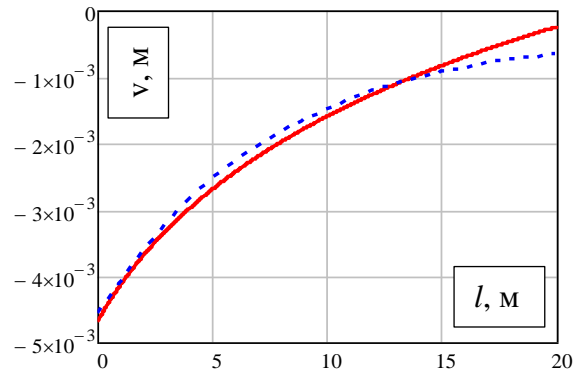


Рисунок 3.29 – Осадка сваи
 $R = 1, D = 40$

Как и при определении нормальных вертикальных напряжений в свае, вводился поправочный коэффициент β , который определялся из условия близости перемещений в свае, полученных аналитическим путём и результатов численных расчётов. Анализ показывает, что при $R=0.5$ м лучшее соответствие для перемещений достигается при $K=R/7$, а при $R=1$ м параметр $K=R/5$ независимо от величины D . Для расчётов на стадии вариантного сравнения, достаточно принять единый параметр $K=R/4$ для определения распределения нормальных вертикальных напряжений и перемещений по длине сваи.

Таким образом, получено, что аналитические решения с достаточной степенью точности для практических расчётов определяют касательные напряжения τ_{xy} на боковой поверхности сваи. Удовлетворительное совпадение нормальных вертикальных напряжений σ_0 и перемещений v по длине сваи достигается путём использования поправочного коэффициента β . Кроме того, для касательных напряжений на боковой поверхности сваи, нормальных вертикальных напряжений и перемещений в свае удалось получить сравнительно простые конечные формулы, выраженные через элементарные функции.

Можно сказать, что получаемые расхождения в результате аналитических и численных расчётов главным образом связаны с тем, что в аналитическом решении ребро не конечно, а граничные условия у основания сваи в численном решении (свая опирается на скальное основание) не соответствуют граничным условиям в аналитическом решении. Этих проблем можно избежать, рассмотрев задачу для

бесконечной полосы с ребром жёсткости в предположении, что одна сторона полосы свободна, а другая жёстко закреплена. Для этой задачи можно построить точное решение и получить замкнутые формулы, аналогичные тем, что приведены в этой работе.

Выводы по главе 3

1. Построено точное аналитическое решение модельной задачи о полуплоскости с одномерным полубесконечным ребром жёсткости, перпендикулярным к её прямолинейной границе, на конце которого действует сосредоточенная сила. Ребро жёсткости представляет собой сваю, которая сопряжена с двух сторон с пластиной – породным массивом.

2. Для касательных напряжений на боковой поверхности сваи, нормальных вертикальных напряжений и перемещений в свае удалось получить сравнительно простые конечные формулы, выраженные через элементарные функции.

3. Аналитические решения, определяющие касательные напряжения по боковой поверхности сваи, с высокой точностью совпадают с численными решениями.

4. Удовлетворительное совпадение нормальных вертикальных напряжений и перемещений по длине сваи достигается путём использования поправочного коэффициента β . Для расчётов на стадии вариантного сравнения, достаточно принять единый скорректированный параметр $K = R / 4$.

5. Расхождения между аналитическими и численными решениями связаны с тем, что аналитическое решение строится для полубесконечного ребра жёсткости. Можно добиться лучшего совпадения, рассмотрев бесконечную полосу, у которой одна сторона свободна, а другая жёстко закреплена.

6. Сравнение аналитических и численных расчётов, выполненных в ПК ZSoil, показывает, что использование точных решений двумерных задач теории упругости в существенно трёхмерных случаях может быть достаточно эффективным для использования в инженерных расчётах.

**ГЛАВА 4 АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ МОДЕЛЬНОЙ ЗАДАЧИ О
ВЗАИМОДЕЙСТВИИ СВАИ С ОКРУЖАЮЩИМ МАССИВОМ:
ПОЛУПЛОСКОСТЬ С ПЕРИОДИЧЕСКИМ НАБОРОМ
ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫХ РЁБЕР ЖЁСТКОСТИ**

В этой главе построено точное решение краевой задачи теории упругости для полуплоскости с периодической системой линейных полубесконечных рёбер жёсткости, ортогональных к прямолинейной границе полуплоскости. Это решение представляется в виде рядов по собственным функциям Папковича – Фадля, коэффициенты которых находятся точно с помощью функций, биортогональных к собственным. Решение строится с позиций теории остаточных напряжений, развитой в статьях [Коваленко, Меньшова, Шуляковская, 2013; Коваленко, Шуляковская, 2011; Kerzhaev, Kovalenko, Menshova, 2018; Kovalenko и др., 2021; Kovalenko, Menshova, Kerzhaev, 2018]. Полученное решение применяется для оценки напряженно-деформированного состояния взаимодействующей со скальным грунтом вертикально нагружённой сваи.

4.1 Постановка задачи

На рисунке 4.1 показана схема задачи. Как и в первой модельной задаче, G – модуль сдвига для пластины, E_1 – модуль упругости ребра; ν – коэффициент Пуассона для пластины и ребра; f – площадь поперечного сечения ребра; ρ – толщина пластины; $P = \sigma_0(0)f$ – силы, приложенные к концам рёбер жёсткости, где $\sigma_0(0)$ – напряжение на конце ребра $y = 0$. Заметим, что в этом решении, в отличие от первой модельной задачи, горизонтальная ось координат обозначена через y , а вертикальная – через x . Это связано с системой обозначений, принятой в теории разложений по собственным функциям Папковича – Фадля для прямоугольных пластин.

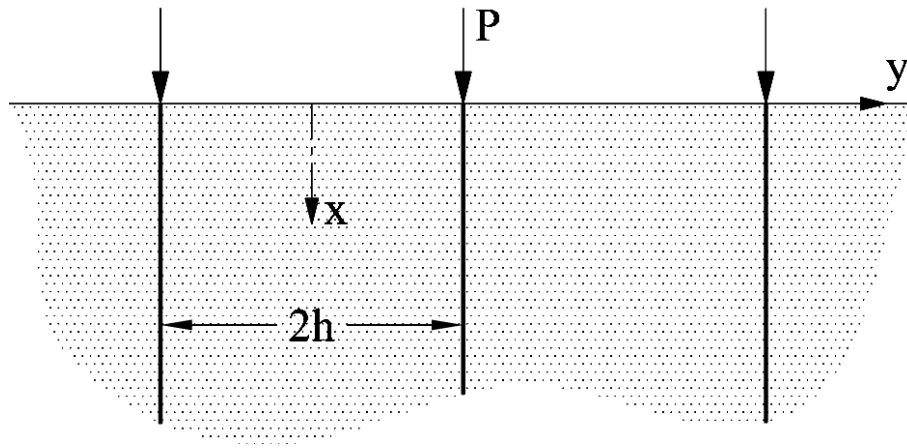


Рисунок 4.1 – Схема периодической задачи

Из условия равновесия элементарного участка ребра dx

$$f \frac{d\sigma_0(x)}{dx} - 2\rho\tau_{xy}(x, h) = 0 \quad (4.1)$$

на основании закона Гука получим первое граничное условие при $y = \pm h$

$$\frac{E_1 f}{2G\rho} \cdot \frac{d^2 U(x, h)}{dx^2} - \tau_{xy}(x, h) = 0. \quad (4.2)$$

Здесь $U(x, h)$ и $\tau_{xy}(x, h)$ – соответственно продольные перемещения и касательные напряжения в пластине вдоль линии её контакта с ребром.

Второе граничное условие получим, полагая, что ребро, в силу симметрии задачи, не прогибается, т.е.

$$V(x, \pm h) = 0. \quad (4.3)$$

Из однородных граничных условий (4.2), (4.3) должны быть найдены характеристическое уравнение для определения собственных значений и формулы для собственных функций, так называемых, функций Папковича – Фадля.

Разыскивая решение бигармонического уравнения, как обычно, методом разделения переменных [Левин, 1956] в виде $\Phi(x, y) = F(y)e^{\lambda x}$ и удовлетворяя затем граничным условиям (4.2), (4.3) получим характеристическое уравнение задачи:

$$L(\lambda) = \sin^2 \lambda h - D_h \frac{\lambda h}{4} \left((\nu - 3) \frac{\sin 2\lambda h}{2} + (1 + \nu) \lambda h \right) = 0, \quad (4.4)$$

$$D_h = \frac{E_1 f}{2G\rho h}.$$

Функция $L(\lambda)$ имеет два нулевых корня, два вещественных $\pm\lambda_1 h$ и бесконечный набор четвёрок комплексных корней, расположенных попарно-симметрично относительно начала координат, т.е. $\pm\lambda_k h, \pm\bar{\lambda}_k h$ ($k = 2, 3, \dots$). Поэтому функцию $F(x)$ можно представить в виде

$$F(x) = C_0 + C_1 x + a_1 e^{\lambda_1 \frac{x}{h}} + \sum_{k=2}^{\infty} a_k e^{\lambda_k x} + \bar{a}_k e^{\bar{\lambda}_k \frac{x}{h}}, \quad (4.5)$$

$$(x \geq 0, \lambda_1 < 0, \operatorname{Re} \lambda_k < 0, k = 2, 3, \dots).$$

Здесь $C_0, C_1, a_1, a_k, \bar{a}_k$ – неизвестные коэффициенты разложений, которые должны быть найдены из граничных условий на торце характерной полуполосы $\{x \geq 0, |y| \leq h\}$ при $x=0$.

Подставляя (4.5) в известные формулы для перемещений и напряжений, выраженные через $F(x)$, получим

$$U(x, y) = \frac{1-\nu}{2} (C_0 + C_1 \frac{x}{h}) + a_1 \xi(\lambda_1, y) e^{\lambda_1 \frac{x}{h}} + \sum_{k=2}^{\infty} a_k \xi(\lambda_k, y) e^{\lambda_k \frac{x}{h}} + \bar{a}_k \xi(\bar{\lambda}_k, y) e^{\bar{\lambda}_k \frac{x}{h}};$$

$$V(x, y) = a_1 \chi(\lambda_1, y) e^{\lambda_1 \frac{x}{h}} + \sum_{k=2}^{\infty} a_k \chi(\lambda_k, y) e^{\lambda_k \frac{x}{h}} + \bar{a}_k \chi(\bar{\lambda}_k, y) e^{\bar{\lambda}_k \frac{x}{h}};$$

$$\sigma_x(x, y) = C_1 + a_1 s_x(\lambda_1, y) e^{\lambda_1 \frac{x}{h}} + \sum_{k=2}^{\infty} a_k s_x(\lambda_k, y) e^{\lambda_k \frac{x}{h}} + \bar{a}_k s_x(\bar{\lambda}_k, y) e^{\bar{\lambda}_k \frac{x}{h}};$$

$$\sigma_y(x, y) = \nu C_1 + a_1 s_y(\lambda_1, y) e^{\lambda_1 \frac{x}{h}} + \sum_{k=2}^{\infty} a_k s_y(\lambda_k, y) e^{\lambda_k \frac{x}{h}} + \bar{a}_k s_y(\bar{\lambda}_k, y) e^{\bar{\lambda}_k \frac{x}{h}};$$

$$\tau_{xy}(x, y) = a_1 t_{xy}(\lambda_1, y) e^{\lambda_1 \frac{x}{h}} + \sum_{k=2}^{\infty} a_k t_{xy}(\lambda_k, y) e^{\lambda_k \frac{x}{h}} + \bar{a}_k t_{xy}(\bar{\lambda}_k, y) e^{\bar{\lambda}_k \frac{x}{h}}. \quad (4.6)$$

Входящие в (4.6) и зависящие от переменной y функции $\xi(\lambda_k, y)$ и т.д. называются собственными функциями Папковича – Фадля. В рассматриваемой задаче они имеют вид ($|y| \leq h$):

$$\xi(\lambda_k, y) = \frac{h}{\lambda_k} \left[\left(\frac{1+\nu}{4} \lambda_k \cos \lambda_k + \frac{\nu-3}{4\lambda_k} \sin \lambda_k \right) \cos \lambda_k \frac{y}{h} + \frac{1+\nu}{4} \lambda_k \frac{y}{h} \sin \lambda_k \sin \lambda_k \frac{y}{h} \right];$$

$$\chi(\lambda_k, y) = -\frac{1+\nu}{4} \frac{h}{\lambda_k} \left(\lambda_k \cos \lambda_k \sin \lambda_k \frac{y}{h} - \lambda_k \frac{y}{h} \sin \lambda_k \cos \lambda_k \frac{y}{h} \right);$$

$$s_x(\lambda_k, y) = \left(\frac{1+\nu}{2} \lambda_k \cos \lambda_k - \frac{3+\nu}{2} \sin \lambda_k \right) \cos \lambda_k \frac{y}{h} + \frac{1+\nu}{2} \lambda_k \frac{y}{h} \sin \lambda_k \sin \lambda_k \frac{y}{h}; \quad (4.7)$$

$$s_y(\lambda_k, y) = \left(\frac{1-\nu}{2} \sin \lambda_k - \frac{1+\nu}{2} \lambda_k \cos \lambda_k \right) \cos \lambda_k \frac{y}{h} - \frac{1+\nu}{2} \lambda_k \frac{y}{h} \sin \lambda_k \sin \lambda_k \frac{y}{h};$$

$$t_{xy}(\lambda_k, y) = \left(\sin \lambda_k - \frac{1+\nu}{2} \lambda_k \cos \lambda_k \right) \sin \lambda_k \frac{y}{h} + \frac{1+\nu}{2} \lambda_k \frac{y}{h} \sin \lambda_k \cos \lambda_k \frac{y}{h}.$$

4.2 Решение задачи

Будем считать, что нагрузка на прямолинейной границе полуплоскости самоуравновешена благодаря действующим здесь, помимо сил P (приложенным к рёбрам жёсткости), постоянным нормальным напряжениям, равным (рисунок 4.2)

$$p = \frac{P}{2\rho h} = \frac{\sigma_0(0)f}{2\rho h}. \quad (4.8)$$

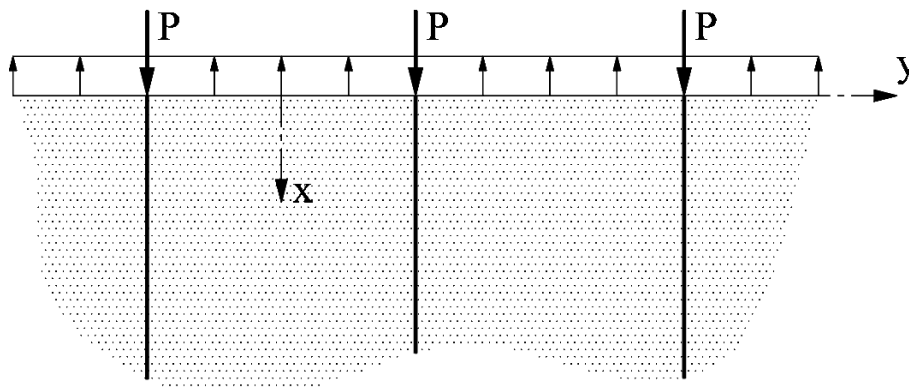


Рисунок 4.2 – Схема периодической задачи с самоуравновешенной нагрузкой

В этом случае решение задачи будет затухающим при $x \rightarrow \infty$ и, следовательно, $C_1 = 0$. Удовлетворяя граничным условиям на торце полуполосы $\{x = 0, |y| \leq h\}$, получим систему из двух функциональных уравнений:

$$\begin{aligned}
p &= a_1 s_x(\lambda_1, y) + \sum_{k=2}^{\infty} a_k s_x(\lambda_k, y) + \bar{a}_k s_x(\bar{\lambda}_k, y); \\
0 &= a_1 t_{xy}(\lambda_1, y) + \sum_{k=2}^{\infty} a_k t_{xy}(\lambda_k, y) + \bar{a}_k t_{xy}(\bar{\lambda}_k, y).
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Неизвестные коэффициенты разложений a_1, a_k, \bar{a}_k определяются отсюда с помощью функций биортогональных к собственным функциям $s_x(\lambda_k, y), t_{xy}(\lambda_k, y)$. Окончательные формулы для перемещений и напряжений (без элементарных решений) в полуполосе $\{x \geq 0, |y| \leq h\}$ будут следующими:

$$\begin{aligned}
u(x, y) &= \frac{p}{G} \left[\frac{\xi(\lambda_1, y) e^{\lambda_1 \frac{x}{h}}}{M_1 \lambda_1} \sigma_1 (1 - \lambda_1 \frac{x}{h}) + \sum_{k=2}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left(\lambda_k \sigma_k \frac{\xi(\lambda_k, y)}{\lambda_k M_k} \right) \frac{\operatorname{Im}(-\bar{\lambda}_k e^{\lambda_k \frac{x}{h}})}{\operatorname{Im} \lambda_k} \right]; \\
v(x, y) &= \frac{p}{G} \left[\frac{\chi(\lambda_1, y) e^{\lambda_1 \frac{x}{h}}}{M_1} \sigma_1 (-1 + \lambda_1 \frac{x}{h}) + \sum_{k=2}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left(\sigma_k \frac{\chi(\lambda_k, y)}{M_k} \right) \frac{\operatorname{Im}(\bar{\lambda}_k e^{\lambda_k \frac{x}{h}})}{\operatorname{Im} \lambda_k} \right]; \\
\sigma_x(x, y) &= p \frac{s_x(\lambda_1, y) e^{\lambda_1 \frac{x}{h}}}{M_1} \sigma_1 (1 - \lambda_1 \frac{x}{h}) - p \sum_{k=2}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left(\sigma_k \frac{s_x(\lambda_k, y)}{\lambda_k^2 M_k} \right) \frac{\operatorname{Im}(\bar{\lambda}_k e^{\lambda_k \frac{x}{h}})}{\operatorname{Im} \lambda_k}; \tag{4.10} \\
\sigma_y(x, y) &= p \frac{-s_y(\lambda_1, y) e^{\lambda_1 \frac{x}{h}}}{M_1 \lambda_1^2} \sigma_1 \lambda_1^2 (1 + \lambda_1 \frac{x}{h}) - p \sum_{k=2}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left(\sigma_k \lambda_k \bar{\lambda}_k \frac{s_y(\lambda_k, y)}{\lambda_k^2 M_k} \right) \frac{\operatorname{Im}(\lambda_k e^{\lambda_k \frac{x}{h}})}{\operatorname{Im} \lambda_k}; \\
\tau_{xy}(x, y) &= -p \frac{t_{xy}(\lambda_1, y) e^{\lambda_1 \frac{x}{h}}}{M_1 \lambda_1} \sigma_1 \lambda_1^2 \frac{x}{h} - p \sum_{k=2}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left(\sigma_k \lambda_k \bar{\lambda}_k \frac{t_{xy}(\lambda_k, y)}{\lambda_k M_k} \right) \frac{\operatorname{Im}(e^{\lambda_k \frac{x}{h}})}{\operatorname{Im} \lambda_k}.
\end{aligned}$$

В формулах (4.10) слагаемые, отвечающие вещественному собственному значению λ_1 , вынесены за знаки суммирования. Они получаются из общих представлений для комплексных чисел λ_k предельным переходом в предположении, что мнимая часть корня стремится к нулю.

Здесь неизвестными являются только числа σ_k – коэффициенты Лагранжа [Коваленко, Меньшова, Шуляковская, 2013; Коваленко, Шуляковская, 2011]. В общем случае они находятся с помощью функций, биортогональных к собственным функциям Папковича – Фадля, но в рассматриваемой задаче их

можно найти непосредственно из уравнения для определения биортогональных функций. Это уравнение имеет такой вид:

$$\int_{-\infty}^{\infty} s_x(\lambda, y) X_k(y) dy = \frac{L(\lambda)}{\lambda(\lambda^2 - \lambda_k^2)} \quad (k = 1, 2, \dots), \quad (4.11)$$

где λ – вещественный параметр. Полагая $\lambda \rightarrow 0$ и переходя к пределу, получим коэффициент Лагранжа для $p = 1$

$$\int_{-\infty}^{\infty} 1 X_k(y) dy = \frac{1}{\lambda_k^2} \left[\frac{1-\nu}{2} D_h + 1 \right] \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (4.12)$$

Следовательно, ($k = 1, 2, \dots$)

$$\sigma_k = \frac{p}{\lambda_k^2} \left(D_h \frac{1-\nu}{2} + 1 \right). \quad (4.13)$$

Числа M_k в формулах являются нормирующими множителями. Представления для них получаются из (4.11) в результате предельного перехода при $\lambda \rightarrow \lambda_k$

$$M_k = \frac{L'(\lambda_k)}{2\lambda_k^2} \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (4.14)$$

В общем случае для произвольных известных чётных функций $\sigma_x(0, y)$ коэффициенты Лагранжа в (4.10) определяются по формуле:

$$\sigma_k = \int_{-h}^h \sigma_x(0, y) x_k(y) dy, \quad x_k(y) = \frac{D_h \cos \lambda_k y}{4\lambda_k \sin \lambda_k} \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (4.15)$$

Представления (4.10) остаются теми же при любых однородных граничных условиях на границах полуполосы $y = \pm h$. Изменяются только собственные числа, собственные функции, нормирующие множители и биортогональные функции $x_k(y)$.

Рядами по собственным функциям Папковича – Фадля (4.10) описываются остаточные (начальные, собственные) напряжения в пластине. Остаточные напряжения всегда самоуравновешены. Физическая сущность остаточных напряжений объяснена в статьях [Коваленко, Меньшова, Шуляковская, 2013; Коваленко, Шуляковская, 2011] на примере известной краевой проблемы теории

упругости для полуплоскости со свободными длинными сторонами на торце которой заданы самоуравновешенные нормальные напряжения (касательные напряжения равны нулю). Она состоит в следующем (рисунок 4.3).

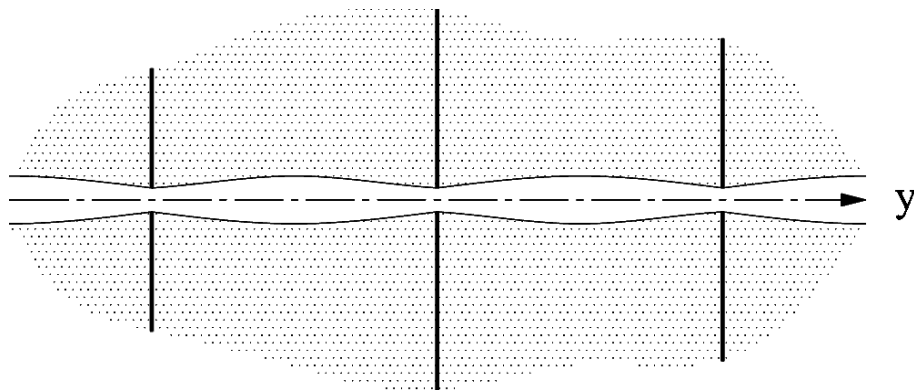


Рисунок 4.3 – К пониманию остаточных напряжений в полуплоскости с рёбрами жёсткости

Сначала ребра жёсткости некоторым образом сжимаются, а затем к ним справа и слева непрерывно присоединяются пластины. Стремление рёбер жёсткости вернуться к первоначальному состоянию приводит к деформации пластин так, что нижняя полуплоскость приобретает примерно такой вид, как на рисунке 4.3 (ниже оси y). Рассмотрим также верхнюю полуплоскость, являющуюся зеркальным отображением нижней. Будем стягивать полуплоскости постоянными напряжениями p до их полного контакта. В результате получим бесконечную плоскость с периодическим набором рёбер жёсткости, в которой есть остаточные напряжения такие, что если отделить нижнюю полуплоскость от верхней, то получим задачу, схема которой приведена на рисунке 4.2. В действительности постоянных напряжений p , приложенных к прямолинейной границе полуплоскости, нет. Чтобы избавиться от них, к плоскости с остаточными напряжениями приложим на бесконечности постоянные сжимающие напряжения p , как показано на рисунке 4.4.

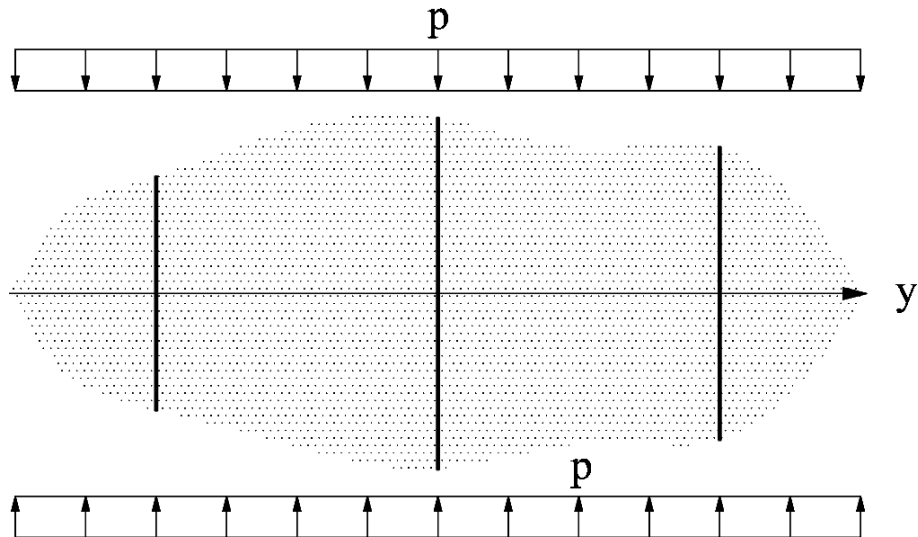


Рисунок 4.4 – Плоскость с остаточными напряжениями, сжатая на бесконечности

В этом случае к решению (4.10) надо добавить элементарное решение для бесконечной плоскости сжатой в вертикальном направлении постоянными напряжениями. Это решение имеет вид

$$\begin{aligned} \sigma_x^e(x, y) &= -p, \sigma_y^e(x, y) = -\nu p, \tau_{xy}^e(x, y) = 0; \\ v^e(x, y) &= 0, u^e(x, y) = -\frac{1-\nu}{2} px. \end{aligned} \quad (4.16)$$

4.3 Определение напряжений и перемещений в ребре жёсткости

Напряжения в ребре жёсткости $\sigma_\tau(x)$ от действия касательных напряжений со стороны правой и левой пластин найдём, интегрируя уравнение (4.1) на интервале $[0, x]$. В результате получим

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_\tau(x)}{\sigma_0(0)} &= 1 + \frac{-t_{xy}(\lambda_1, h)}{\lambda_1 M_1} \sigma_1 \left[\left(\frac{x}{h} \lambda_1 - 1 \right) e^{\lambda_1 \frac{x}{h}} + 1 \right] - \\ &- \sum_{k=2}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left[\frac{t_{xy}(\lambda_k, h)}{\lambda_k M_k} \sigma_k \right] \lambda_k \bar{\lambda}_k \frac{\operatorname{Im} \left[\frac{e^{\lambda_k \frac{x}{h}} - 1}{\lambda_k} \right]}{\operatorname{Im} \lambda_k}. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Используя затем неопределённое интегрирование уравнения закона Гука для ребра

$$u_\tau(x) = \frac{1}{E_1} \int \sigma_\tau(x) dx \quad (4.18)$$

получим формулу для перемещений в ребре жёсткости, обусловленных действующими на ребро касательными напряжениями

$$u_\tau(x) = \frac{\sigma_0(0)}{E_1} \left\{ \begin{array}{l} x + \frac{t_{xy}(\lambda_1, h)}{\lambda_1 M_1} \sigma_1 \left[\left(x - \frac{2h}{\lambda_1} \right) e^{\lambda_1 \frac{x}{h}} + x \right] - \\ - \sum_{k=2}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left[\frac{t_{xy}(\lambda_k, h)}{\lambda_k M_k} \sigma_k \right] \lambda_k \bar{\lambda}_k \frac{\operatorname{Im} \left[\frac{h}{\lambda_k^2} e^{\lambda_k \frac{x}{h}} - \frac{x}{\lambda_k} \right]}{\operatorname{Im} \lambda_k} \end{array} \right\} \quad (4.19)$$

Добавляя к ним перемещения (4.10) $u(x, h)$ ребра вместе с пластиной, получим полное перемещение в ребре жёсткости

$$U(x) = u_\tau(x) + u(x, h). \quad (4.20)$$

Тогда полные напряжения в ребре будут следующими

$$\sigma_0(x) = \sigma_\tau(x) + E_1 \frac{du(x, h)}{dx}, \quad (4.21)$$

где

$$\frac{du(x, h)}{dx} = p \left[\frac{\xi(\lambda_1, h) x e^{\lambda_1 \frac{x}{h}}}{M_1 h^2} \sigma_1 \lambda_1^2 + \sum_{k=2}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left(\lambda_k \bar{\lambda}_k \sigma_k \frac{\xi(\lambda_k, y)}{M_k} \right) \frac{\operatorname{Im}(e^{\lambda_k \frac{x}{h}})}{\operatorname{Im} \lambda_k} \right]. \quad (4.22)$$

4.4 Сравнение аналитических решений с численным. Применение к расчёту единичной сваи

Так же, как и в первой модельной задаче, были рассмотрены восемь примеров: две сваи с радиусами равными $R=0.5$ м и $R=1$ м, полностью заглублённые в скальные грунты от сильнодеформируемых до очень слабодеформируемых, с модулем деформации массива $E = 2000 \cdot 10^4$, $E = 1000 \cdot 10^4$, $E_m = 500 \cdot 10^4$ и $E = 200 \cdot 10^4$ кПа. Модуль упругости сваи примем

равным $E_1 = 300 \cdot 10^5$ кПа. Длина сваи – 20 м. Коэффициент Пуассона для сваи и грунта $\nu = 0.3$. К голове сваи приложена сжимающая равномерно распределённая нагрузка $\sigma_0 = 20\,000$ кПа.

Ниже приводятся три серии графиков для касательных напряжений $\tau_{xy}(x, h)$ на рисунках 4.5 – 4.12, нормальных вертикальных напряжений в свае $\sigma_0(x)$ на рисунках 4.13 – 4.20 и вертикальных перемещений $U(x)$ в свае на рисунках 4.21 – 4.28 в зависимости от радиуса сваи R , модуля деформации массива E и половины расстояния между осями свай h , объединённых в один параметр

$$D_h = \frac{E_1 f}{G 2 \rho h} = \frac{E_1 \pi R^2}{G 2 \pi R h} = \frac{E_1 (1 + \nu) R}{E h}$$

от величины которого зависят корни характеристического уравнения (4.4).

На каждом графике представлены по две кривые: *сплошным* кривым соответствуют аналитические решения, *пунктирным* – численные.

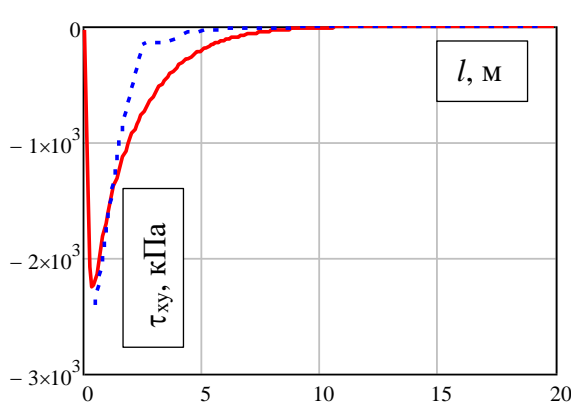


Рисунок 4.5 – Распределение касательных напряжений

$$x = 0.125, R = 0.5, E = 2 \cdot 10^7, h = 3$$

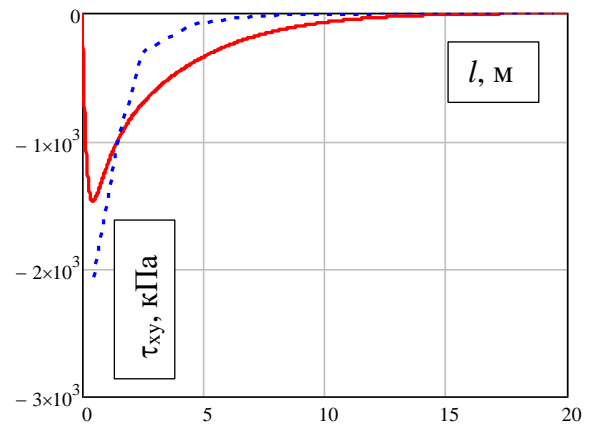


Рисунок 4.6 – Распределение касательных напряжений

$$x = 0.125, R = 0.5, E = 10^7, h = 5$$

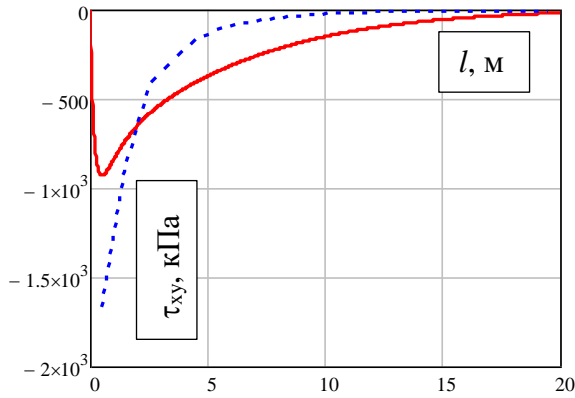


Рисунок 4.7 – Распределение касательных напряжений

$$x = 0.125, R = 0.5, E = 5 \cdot 10^6, h = 7$$

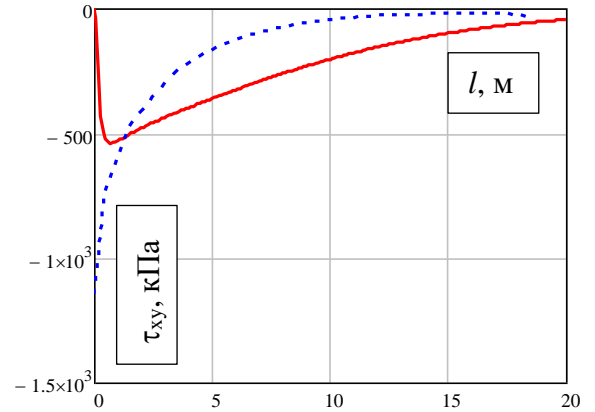


Рисунок 4.8 – Распределение касательных напряжений

$$x = 0.125, R = 0.5, E = 2 \cdot 10^6, h = 7$$

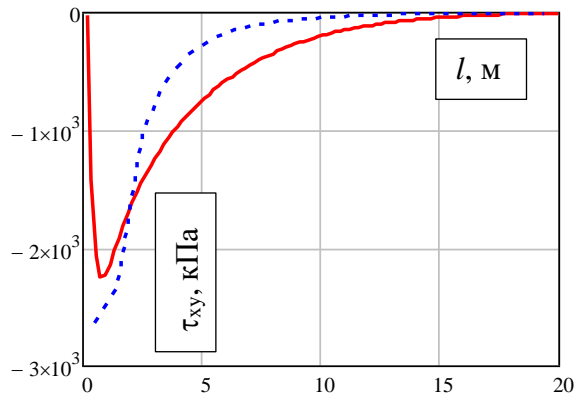


Рисунок 4.9 – Распределение касательных напряжений

$$x = 0.25, R = 1, E = 2 \cdot 10^7, h = 6$$

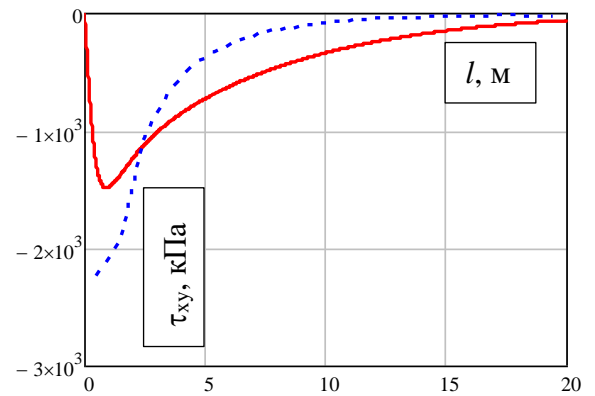


Рисунок 4.10 – Распределение касательных напряжений

$$x = 0.25, R = 1, E = 10^7, h = 9$$

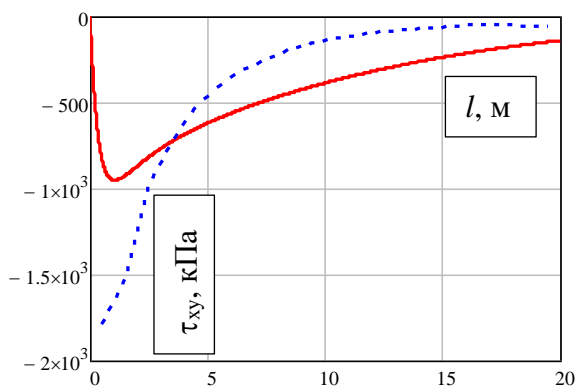


Рисунок 4.11 – Распределение касательных напряжений

$$x = 0.25, R = 1, E = 5 \cdot 10^6, h = 12$$

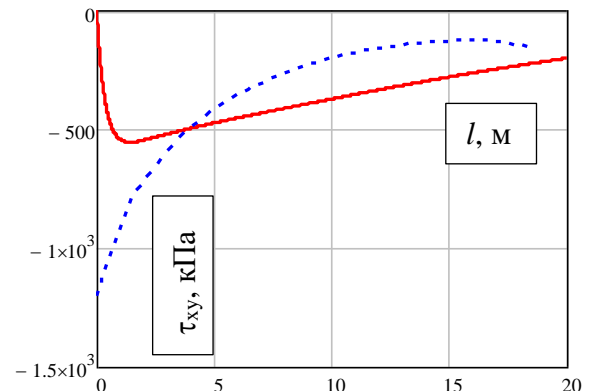


Рисунок 4.12 – Распределение касательных напряжений

$$x = 0.25, R = 1, E = 2 \cdot 10^6, h = 13$$

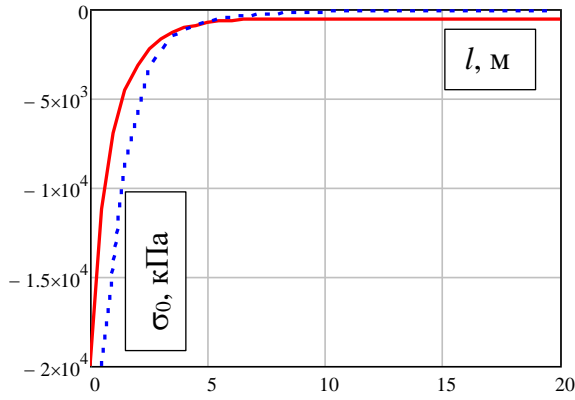


Рисунок 4.13 – Распределение нормальных напряжений в свае

$$R = 0.5, E = 2 \cdot 10^7, h = 3$$

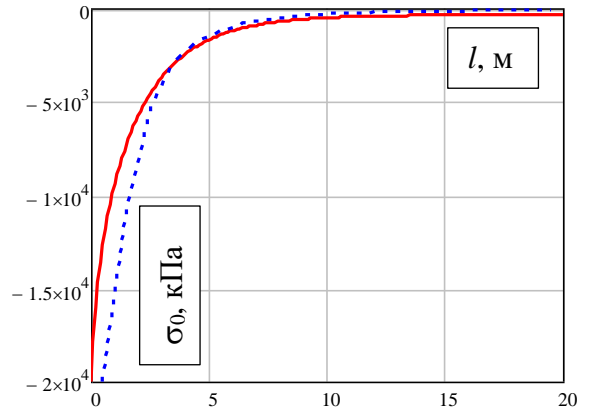


Рисунок 4.14 – Распределение нормальных напряжений в свае

$$R = 0.5, E = 10^7, h = 5$$

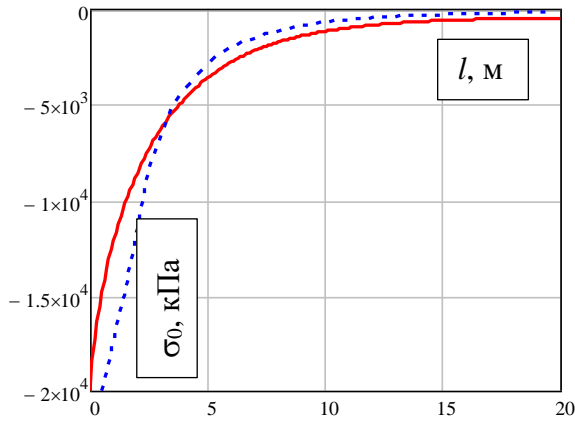


Рисунок 4.15 – Распределение нормальных напряжений в свае

$$R = 0.5, E = 5 \cdot 10^6, h = 7$$

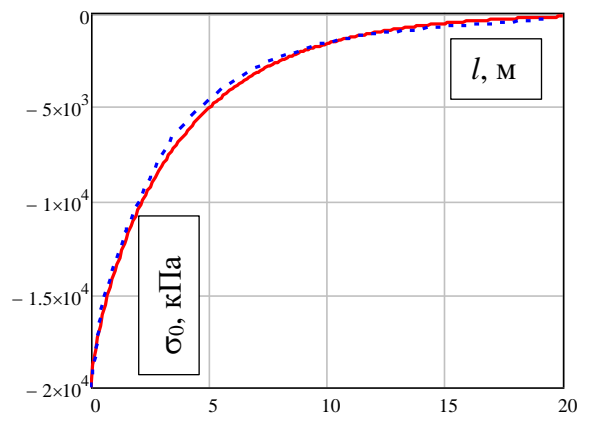


Рисунок 4.16 – Распределение нормальных напряжений в свае

$$R = 0.5, E = 2 \cdot 10^6, h = 7$$

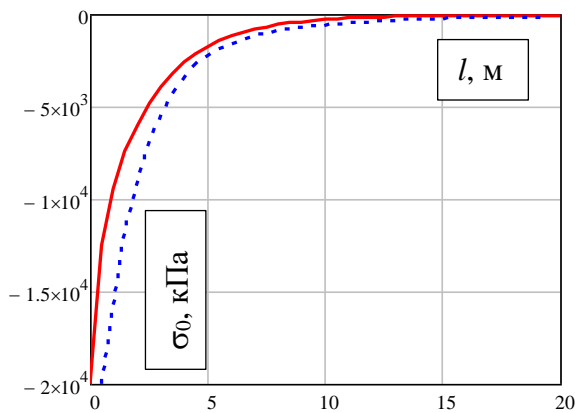


Рисунок 4.17 – Распределение нормальных напряжений в свае

$$R = 1, E = 2 \cdot 10^7, h = 6$$

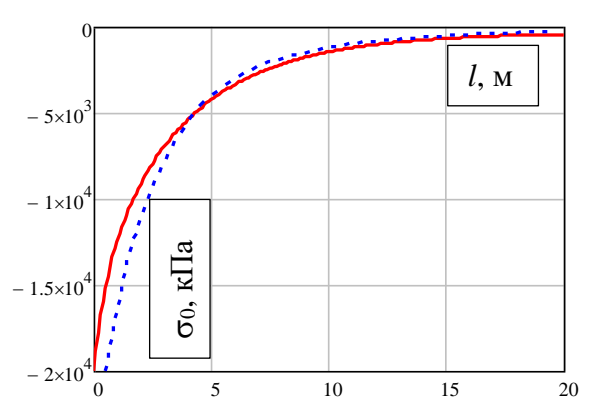


Рисунок 4.18 – Распределение нормальных напряжений в свае

$$R = 1, E = 10^7, h = 9$$

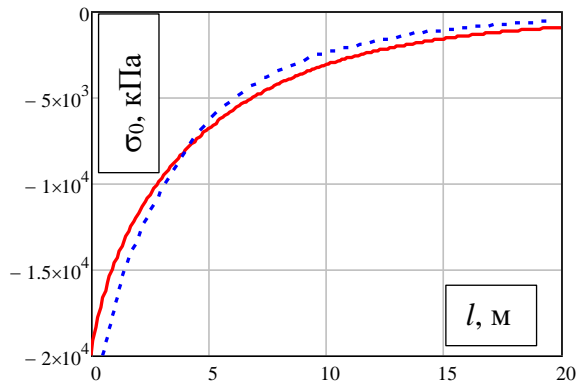


Рисунок 4.19 – Распределение нормальных напряжений в свае

$$R = 1, E = 5 \cdot 10^6, h = 12$$

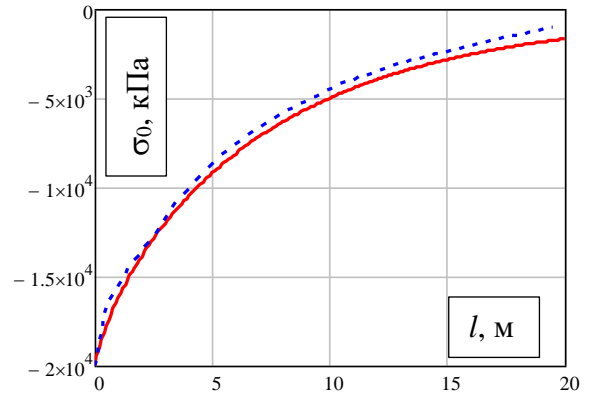


Рисунок 4.20 – Распределение нормальных напряжений в свае

$$R = 1, E = 2 \cdot 10^6, h = 13$$

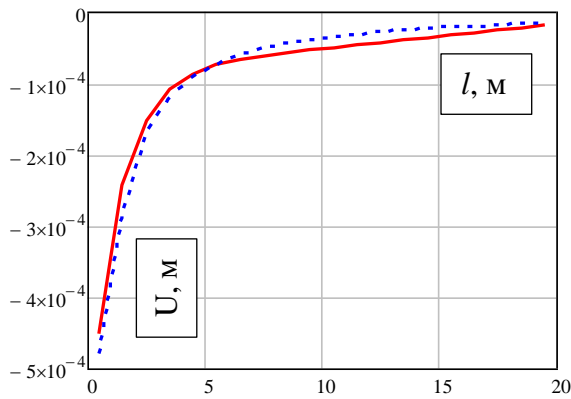


Рисунок 4.21 – Осадка сваи

$$R = 0.5, E = 2 \cdot 10^7, h = 3$$

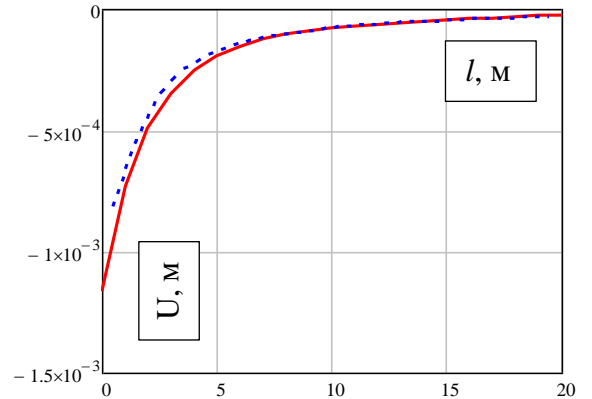


Рисунок 4.22 – Осадка сваи

$$R = 0.5, E = 10^7, h = 5$$

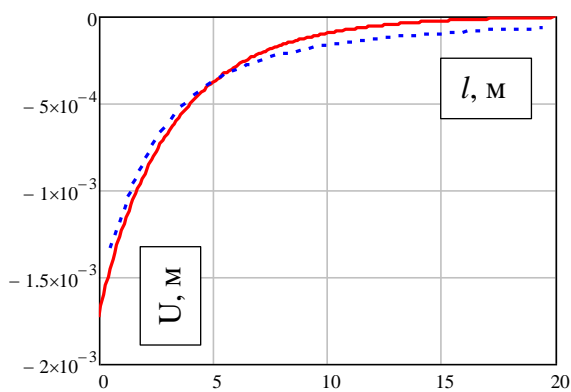


Рисунок 4.23 – Осадка сваи

$$R = 0.5, E = 5 \cdot 10^6, h = 7$$

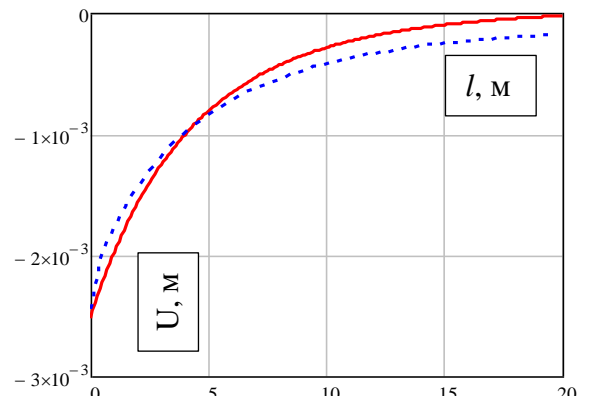


Рисунок 4.24 – Осадка сваи

$$R = 0.5, E = 2 \cdot 10^6, h = 7$$

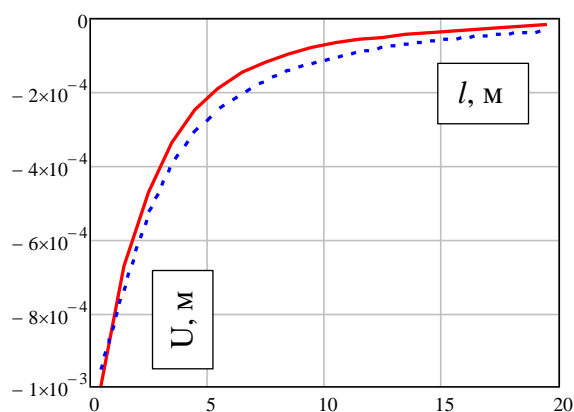


Рисунок 4.25 – Осадка сваи

$$R = 1, E = 2 \cdot 10^7, h = 6$$

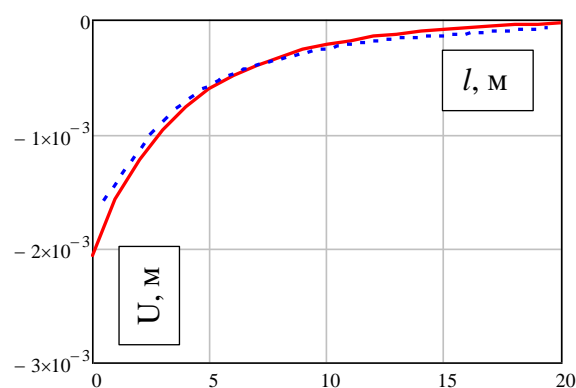


Рисунок 4.26 – Осадка сваи

$$R = 1, E = 10^7, h = 9$$

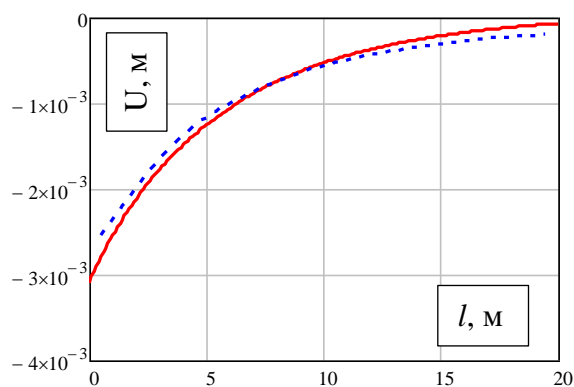


Рисунок 4.27 – Осадка сваи

$$R = 1, E = 5 \cdot 10^6, h = 12$$

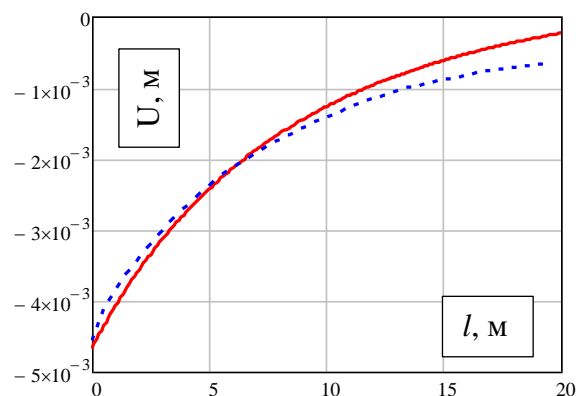


Рисунок 4.28 – Осадка сваи

$$R = 1, E = 2 \cdot 10^6, h = 13$$

Как видно из графиков, касательные напряжения (рисунки 4.5 – 4.12) в аналитическом и численном решениях в сечениях $x = 0.125$, $x = 0.25$ м заметно различаются. В численных решениях, основанных на классической теории упругости, касательные напряжения на поверхности сваи в той или иной степени будут обязательно возрастать по мере приближения к голове сваи до бесконечности (величины тем большей, чем больше разрядная сетка вычислительной машины, используемой для расчётов). Однако, как показывают исследования, это не соответствует реальному характеру распределения касательных напряжений по боковой поверхности. В рассматриваемом аналитическом решении касательные напряжения не имеют такой особенности в месте выхода ребра на границу полуплоскости (что можно видеть из графиков, на которых они здесь равны нулю).

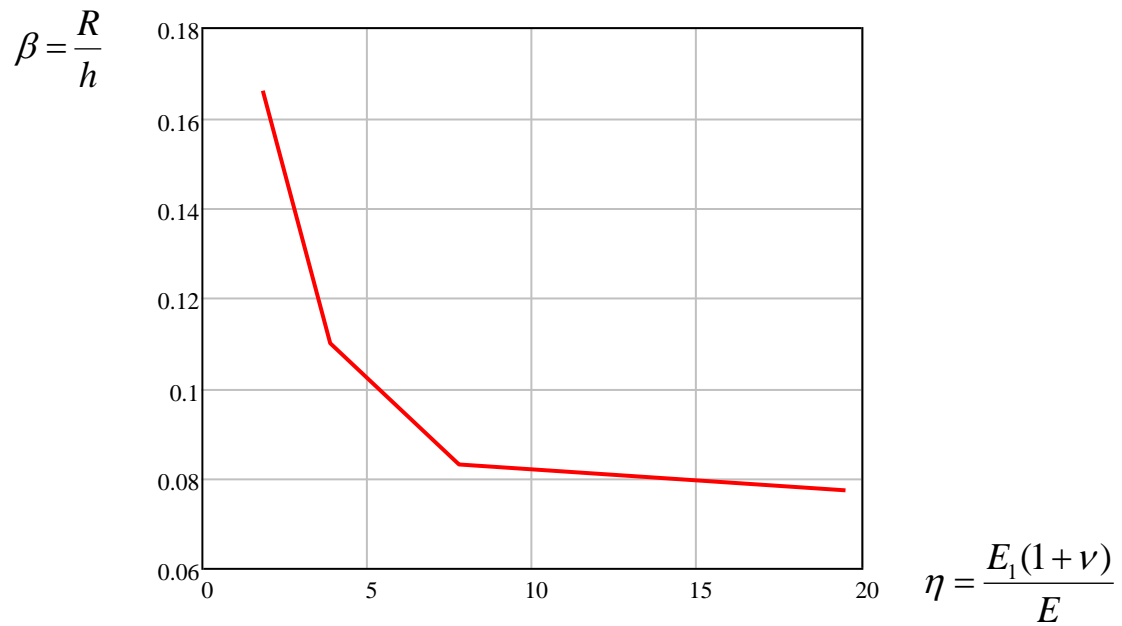
В работах [Коваленко, Меньшова, Кержаев, 2021; Коваленко, Меньшова, Шуляковская, 2013; Коваленко, Шуляковская, 2011; Kerzhaev, Kovalenko, Menshova, 2018; Kovalenko и др., 2021; Kovalenko, Menshova, Kerzhaev, 2018] было установлено, что причина этого заключается в следующем. В классической теории упругости граница области прямолинейная до приложения нагрузки остаётся прямолинейной и после её приложения. Математически это выражается в том, что граничные условия ставятся на прямолинейной, недеформированной границе. В решениях краевых задач, основанных на разложениях по собственным функциям Папковича – Фадля, это не так: внешняя нагрузка прикладывается не к прямолинейной, а к деформированной границе области, деформация которой обусловлена приложенной нагрузкой (что физически более правильно).

Таким образом, впервые получено аналитическое решение для определения касательных напряжений по боковой поверхности свай, качественно совпадающие с результатами лабораторных испытаний, полученных поляризационно-оптическим методом [Колесник, 1971]. Для проверки количественного совпадения необходимы дополнительные исследования свай в скальных грунтах.

Аналитические и численные решения для напряжений (рисунки 4.13 – 4.20) и перемещений (рисунки 4.21 – 4.28) в свае согласуются хорошо.

Параметр h , входящий в аналитическое решение, как половина расстояния между рёбрами жёсткости, при адаптации аналитического решения к численному приобретает дополнительный смысл. Он выбирается из условия близости аналитических и численных решений одиночной сваи.

Основываясь на имеющихся в работе значениях параметров $\beta = \frac{R}{h}$ и $\eta = \frac{E_1(1+\nu)}{E}$ можно построить график зависимости $\beta(\eta)$ (рисунок 4.29).

Рисунок 4.29 – Кривая $\beta(\eta)$

Пользуясь этим графиком при заданных E, E_1, ν, R , можно найти значение h , при котором достигается наилучшее соответствие аналитических решений периодической задачи для оценки напряженно-деформированного состояния одиночной сваи.

Выводы по главе 4

1. Построено точное аналитическое решение модельной задачи о полуплоскости с периодическим набором одномерных полубесконечных рёбер жёсткости – свай. Это решение представляется в виде рядов по собственным функциям Папковича – Фадля, коэффициенты которых находятся точно с помощью функций, биортогональных к собственным. Решение строится с позиций теории остаточных напряжений.

2. Впервые получено аналитическое решение для определения касательных напряжений по боковой поверхности сваи, качественно совпадающие с экспериментальными исследованиями. Для проверки количественного совпадения необходимы дополнительные исследования свай в скальных грунтах.

3. Аналитические решения, определяющие нормальные вертикальные напряжения и перемещения по длине сваи очень хорошо согласуются с численными решениями.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В первой части диссертационной работы по итогам исследований деформационных свойств скальных массивов было получено следующее:

1. Представлена методика приведения трещиноватого скального массива к анизотропной однородной среде, деформационные свойства которой зависят от напряженного состояния.

2. В рамках данного подхода, основанного на параметрическом методе асимптотического усреднения, получены простые аналитические зависимости для определения эффективных деформационных характеристик скальных массивов, рассечённых плоскопараллельной и ортогональной системами трещин. Данный подход также может быть применим к оценке трещиноватых скальных массивов с произвольной трещиноватостью.

3. Исследования, проведённые в работе, ещё раз подтвердили высокую степень влияния трещиноватости на деформационные свойства скальных массивов.

4. Подтверждена правомерность использования предложенных зависимостей для определения деформационных характеристик трещиноватых скальных массивов с плоскопараллельной и ортогональной системами трещин при соблюдении критерия квазисплошности.

Во второй части диссертационной работы был изучен механизм работы свай в скальном грунте, получены аналитические и численные решения задачи о взаимодействии длинной сваи с породным массивом. Выполненные исследования позволяют сделать следующие выводы:

5. Получены аналитические зависимости для определения НДС системы «свая – скальный грунт» на основе точных решений краевых задач теории упругости о плосконапряжённом состоянии.

6. Аналитическое решение модельной задачи о взаимодействии сваи с окружающим массивом в постановке полуплоскость с одномерным ребром жёсткости (задача 1) с высокой точностью совпадает с численными решениями,

определяющими касательные напряжения по боковой поверхности сваи. Тем не менее оба решения имеют особенность в месте выхода сваи на поверхность.

7. Решение задачи в постановке полуплоскость с периодическим набором полубесконечных рёбер жёсткости (задача 2) позволило впервые получить аналитическое решение для определения касательных напряжений по боковой поверхности сваи, качественно совпадающие с экспериментальными исследованиями. Для проверки количественного совпадения необходимы дополнительные исследования свай в скальных грунтах.

8. Аналитические решения, определяющие нормальные вертикальные напряжения и перемещения по длине сваи, очень хорошо согласуются с численными решениями.

9. Сравнение аналитических и численных расчётов показывает, что использование точных решений двумерных задач теории упругости в существенно трёхмерных случаях может быть достаточно эффективным для использования в инженерных расчётах.

Перспективы дальнейшей разработки темы

В дальнейшем предполагается, в частности, продолжить исследования, связанные с аналитическими методами решения задач о взаимодействии сваи с породным массивом. Здесь есть два основных направления. Первое направление связано с усложнением двумерной модели, так чтобы учесть конечность длины сваи и граничные условия у её основания. Также планируется дополнить полученные решения условием неидеального контакта по боковой поверхности сваи. Цель второго направления – получить простые замкнутые решения, выраженные через элементарные функции. Этого можно достичь, если пренебречь поперечной деформацией массива.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вакуленко А. А., Качанов М. Л. Континуальная теория среды с трещинами // Известия АН СССР, Механика твёрдого тела. – 1971. – Т. 4. – С. 159-166.
2. Власов А. Н. Определение эффективных деформационных характеристик слоистых и трещиноватых скальных пород : дис. ... канд. техн. наук : 01.02.07. – М. : Моск. инж.-строит. ин-т им. В. В. Куйбышева, 1990. – 186 с.
3. Власов А. Н. Усреднение механических характеристик структурно-неоднородных природных материалов – скальных пород: дис. ... д-ра техн. наук : 01.02.04. – Ижевск : Институт прикладной механики УрО РАН, 2010. – 340 с.
4. Власов А. Н., Власов Д. А., Коваленко М. Д. Полуплоскость с полубесконечным ребром жёсткости (приложение к расчёту свай) // Материалы XIV Международной конференции по прикладной математике и механике в аэрокосмической отрасли (АММАГ'2022), 4–13 сентября 2022 г., Алушта. – М. : Изв-во МАИ, 2022. – С. 177-179.
5. Власов А. Н., Волков-Богородский Д. Б. Параметрический метод асимптотического усреднения для нелинейных уравнений термоупругости с быстроосциллирующими коэффициентами // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2014. – Т. 20. – № 4. – С. 491-505.
6. Власов А. Н., Зерцалов М. Г., Власов Д. А. О применимости метода асимптотического усреднения к оценке деформационных характеристик скальных массивов // Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред : Тезисы докладов 8-й Всероссийской научной Конференции с международным участием им. И.Ф. Образцова и Ю.Г. Яновского, Москва, 18–19 декабря 2018 года. – М. : Институт прикладной механики РАН, 2018. – С. 150.
7. Власов А. Н., Зерцалов М. Г., Власов Д. А. О применимости метода асимптотического усреднения к оценке деформационных характеристик скальных массивов // Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред : Сборник трудов 8-й Всероссийской научной конференции с

международным участием им. И.Ф. Образцова и Ю.Г. Яновского, Москва, 18–19 декабря 2018 года. – М. : Институт прикладной механики РАН, 2019. – С. 316-328.

8. Власов А. Н., Мерзляков В. П. Усреднение деформационных и прочностных свойств в механике скальных пород. – М. : Изд-во АСВ, 2009. – 206 с.

9. Власов В. В. Метод начальных функций в задачах теории упругости и строительной механики. – М. : Стройиздат, 1975.

10. Власов Д. А. Оценка давления, передаваемого сваей на скальный массив при действии осевой нагрузки, в зависимости от её деформационных и геометрических характеристик // Строительство - формирование среды жизнедеятельности: сборник материалов XIX Международной межвузовской научно-практической конференции студентов, магистрантов, аспирантов и молодых учёных, Москва, 27–29 апреля 2016 года. – М. : Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, 2016. – С. 1018-1021.

11. Власов Д. А., Зерцалов М. Г. Аналитическое и численное решения задачи о взаимодействии сваи с грунтом // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2021. – Т. 27. – № 4. – С. 491-499.

12. Власов Д. А., Зерцалов М. Г. Определение нагрузки, передаваемой сваей, заделанной в скальный массив, на дно скважины в условиях сжатия // Научная конференция молодых учёных и аспирантов ИФЗ РАН: Тезисы докладов и программа Конференции, Москва, 23–24 апреля 2018 года. – М. : Институт физики Земли им. О.Ю. Шмидта РАН, 2018. – С. 28.

13. Гудман Р. Е. Механика скальных пород. – М. : Стройиздат, 1987. – 232 с.

14. Гуняев Г. М. и др. Зависимость упругих и прочностных характеристик высококомодульных композитов от схем армирования // Механика полимеров. – 1974. – Т. 6. – С. 1019-1027.

15. Жигун В. И. и др. Простые и надёжные методы определения модулей сдвига конструкционных материалов // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2019. – Т. 25. – № 4. – С. 473-491.

16. Жигун И. Г., Поляков В. А. Свойства пространственно-армированных пластиков. – Рига : Зинатне, 1978. – 215 с.
17. Зерцалов М. Г. Влияние контакта «свая–скальный массив» на осадку свай // Основания, фундаменты и механика грунтов. – 2018. – № 4. – С. 2-5.
18. Зерцалов М. Г. Геомеханика. Введение в механику скальных грунтов: Учебник. – М. : Изд-во АСВ, 2014. – 352 с.
19. Кеч В., Теодореску П. Введение в теорию обобщённых функций. – М. : Изд-во МИР, 1978. – 518 с.
20. Коваленко М. Д., Меньшова И. В., Кержаев А. П. Некоторые решения теории упругости для прямоугольника // Прикладная математика и механика. – 2021. – Т. 85. – № 3. – С. 370-382.
21. Коваленко М. Д., Меньшова И. В., Шуляковская Т. Д. Разложения по функциям Фадля–Папковича. Примеры решений в полуполосе // Известия РАН. Механика твёрдого тела. – 2013. – Т. 5. – С. 136-158.
22. Коваленко М. Д., Шуляковская Т. Д. Разложения по функциям Фадля–Папковича в полосе. Основы теории // Известия РАН. Механика твёрдого тела. – 2011. – Т. 5. – С. 78-98.
23. Козлов С. М. Осреднение дифференциальных операторов с почти-периодическими быстроосциллирующими коэффициентами // Матем. сб. – 1978. – Т. 107(149). – № 2(10). – С. 199-217.
24. Козлов С. М. Осреднение случайных операторов // Матем. сб. – 1980. – Т. 109(151). – № 2(6). – С. 167-180.
25. Козлов С. М. Осреднение случайных структур // Докл. АН СССР. – 1978. – Т. 241. – № 5. – С. 1016-1019.
26. Колесник Г. С. Определение несущей способности свай по результатам статического зондирования: дис. ... канд. техн. наук. – Одесса, 1971. – 150 с.
27. Лебедев Н. Н. Специальные функции и их приложения. – 2. – М.-Л. : ГИФМЛ, 1963. – 358 с.
28. Левин Б. Я. Распределение корней целых функций. – М. : Гостехиздат, 1956. – 632 с.

29. Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела. – М. : Наука, 1977. – 415 с.
30. Методические рекомендации по методам исследований скальных пород и массивов. Т. 2. – М. : Советский комитет по участию в международном обществе по механике скальных пород, 1984. – 249 с.
31. Орехов В. Г., Зерцалов М. Г. Механика разрушения инженерных сооружений и горных пород. – М. : Изд-во Ассоциации Строительных Вузов, 1999. – 330 с.
32. Победря Б. Е. Механика композиционных материалов. – М. : МГУ, 1984.
33. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Т. 1. – М. : Физматлит, 2003. – 630 с.
34. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Т. 2. – М. : Физматлит, 2003.
35. Речицкий В. И. Оценка характеристик жёсткости скальных трещин по данным натурных исследований на гидротехнических объектах // Гидротехническое строительство. – 1998. – Т. 8.
36. Рупшенейт К. В. Деформируемость трещиноватых горных пород. – М. : Недра, 1975.
37. Тарасова И. В. Влияние трещиноватости на деформируемость скальных оснований // Основания, фундаменты и механика грунтов. – 1968. – № 2. – С. 22-23.
38. Ухов С. Б. Скальные основания гидротехнических сооружений. – М. : Энергия, 1975.
39. Фильштинский А. А. Взаимодействие двоякопериодической системы прямолинейных трещин в изотропной среде // Прикладная математика и механика. – 1974. – Т. 38. – № 5. – С. 906-914.
40. Чернышёв С. Н. Трещины горных пород. – М. : Наука, 1983. – 240 с.
41. AASHTO LRFD Bridge Design Specifications, 8th ed. – 2017.
42. Amadei B. In situ stress measurements in anisotropic rock // International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences and. – 1984. – Vol. 21. – № 6.

43. Amadei B., Saeb S. Constitutive models of rock joints // *Rock Joints. Proceedings of the international symposium on rock joints / eds. N. Barton, O. Stephansson. – Loen, Norway : A.A.Balkema/Rotterdam/Brookfield, 1990. – P. 581-592.*
44. Amadei B., Savage W. Z. Effect of joints on rock mass strength and deformability // *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences & Geomechanics Abstracts. – 1994. – Vol. 31. – № 3. – P. 134.*
45. Barton N. et al. Application of Q-system in design decisions concerning dimensions and appropriate support for underground installations // *Subsurface Space. – 1981. – Vol. 2. – P. 553-561.*
46. Bakhvalov N. S., Panasenko G. P. Homogenisation: averaging processes in periodic media. *Mathematical Problems in the Mechanics of Composite Materials. – Dordrecht : Kluwer Academic Publishers, 1989.*
47. Barton N. Some new Q-value correlations to assist in site characterisation and tunnel design // *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences. – 2002. – Vol. 39. – № 2.*
48. Bieniawski Z. T. Determining rock mass deformability: experience from case histories // *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences and. – 1978. – Vol. 15. – № 5.*
49. Bobet, A. et al. Numerical models in discontinuous media: review of advances for rock mechanics applications // *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering. – 2009. – Vol. 135. – № 11. – P. 1547-1561.*
50. *Canadian Foundation Engineering Manual. – 2006.*
51. Carter J. P., Kulhawy F. H. Analysis and design of foundations socketed into rock // *Electric Power Research Institute. – 1988. – № EL-5918.*
52. Chang C. S., Huang T. H. A constitutive model for jointed rock masses // *Journal of the Chinese Institute of Engineers. – 1988. – Vol. 11. – № 1. – P. 25-34.*
53. Coon R. F., Merritt A. H. Predicting in situ modulus of deformation using rock quality indexes. – 100 Barr Harbor Drive, PO Box C700, West Conshohocken, PA 19428-2959 : ASTM International, 1970.

54. Cuisiat F. D. E., Hyett A. J., Hudson J. A. Numerical investigation of the boundary conditions effect on rock joint behaviour // *Rock Joints. Proceedings of the international symposium on rock joints / eds. N. Barton, O. Stephansson. – Loen, Norway : A.A.Balkema/Rotterdam/Brookfield, 1990. – P. 611-616.*

55. Donald I. B., Sloan S. W., Chiu H. K. Theoretical analyses of rock socketed piles // *Proceedings, International Conference on Structural Foundations on Rock. – Sydney, 1980. – P. 303-316.*

56. Duncan J. M., Goodman R. E. Finite element analysis of slopes in jointed rocks. – 1968.

57. Fossum A. F. Effective elastic properties for a randomly jointed rock mass // *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences & Geomechanics Abstracts. – 1985. – Vol. 22. – № 6. – P. 467-470.*

58. Gardner W. S. Design of drilled piers in the Atlantic Piedmont // *Foundations and Excavations in Decomposed Rock of the Piedmont Province / ed. R. E. Smith. – Reston : ASCE, 1987. – Vol. 9. – P. 62-86.*

59. Gokceoglu C., Sonmez H., Kayabasi A. Predicting the deformation moduli of rock masses // *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences. – 2003. – Vol. 40. – № 5.*

60. Goodman R. E. The Deformability of Joints // *Determination of the In Situ Modulus of Deformation of Rock. – 100 Barr Harbor Drive, PO Box C700, West Conshohocken, PA 19428-2959 : ASTM International, 1970. – P. 174-196.*

61. Hirany A., Kulhawy F. H. On the interpretation of drilled foundation load test results // *Deep Foundations 2002. – Reston, VA : American Society of Civil Engineers, 2002. – P. 1018-1028.*

62. Hoek E., Brown E. T. Practical estimates of rock mass strength // *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences. – 1997. – Vol. 34. – № 8.*

63. Hoek E., Diederichs M. S. Empirical estimation of rock mass modulus // *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences. – 2006. – Vol. 43. – № 2.*

64. Horvath R. G. Field load test data on concrete-to-rock bond strength for drilled pier foundations. – Toronto, 1978.

65. Horvath R. G., Kenney T. C. Shaft resistance of rock-socketed drilled piers // Symposium on Deep Foundations, Atlanta / ed. F. M. Fuller. – New York : ASCE, 1979. – P. 182-214.
66. Jing L. A review of techniques, advances and outstanding issues in numerical modelling for rock mechanics and rock engineering // International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences. – 2003. – Vol. 40. – № 3. – P. 283-353.
67. Jing L., Hudson J. A. Numerical methods in rock // International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences. – 2002. – Vol. 39. – № 4. – P. 409-427.
68. Jing L., Stephansson O. Fundamentals of discrete element methods for rock engineering: theory and applications. – 2007.
69. Kerzhaev A. P., Kovalenko M. D., Menshova I. V. Borel transform in the class W of quasi-entire functions // Complex Analysis and Operator Theory. – 2018. – Vol. 12. – № 3. – P. 571-587.
70. Kovalenko M. D. et al. Expansions in terms of Papkovitch–Fadle eigenfunctions in the problem for a half-strip with stiffeners // ZAMM Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik. – 2021. – Vol. 101. – № 9.
71. Kovalenko M. D., Menshova I. V., Kerzhaev A. P. On the exact solutions of the biharmonic problem of the theory of elasticity in a half-strip // Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik. – 2018. – Vol. 69. – № 5.
72. Kulhawy F. H. Geomechanical model for rock foundation settlement // Journal of the Geotechnical Engineering Division. – 1978. – Vol. 104. – № 2. – P. 211-227.
73. Kulhawy F. H., Phoon K. K. Drilled shaft side resistance in clay soil to rock // Design and Performance of Deep Foundations: Piles and Piers in Soil and Soft Rock. – New York : ASCE, 1993. – P. 172-183.
74. Kulhawy F. H., Prakoso W. A. Issues in evaluating capacity of rock socket foundations // Geotechnical Engineering. – 2008. – Vol. 39. – № 1.
75. Kulhawy F. H., Prakoso W. A., Akbas S. O. Evaluation of capacity of rock foundation sockets // 40th US Rock Mechanics Symposium, ALASKA ROCKS 2005: Rock Mechanics for Energy, Mineral and Infrastructure Development in the Northern Regions. – ARMA, 2005. – P. 154-181.

76. Ladanyi B., Archambault G. Direct and indirect determination of shear strength in rock mass // ASTM Special Technical Publication. – 1980.

77. Ladanyi B., Archambault G. Simulation of shear behavior of a jointed rock mass // Proc. 11th U.S. Symposium on Rock Mechanics, USRMS 1969. – Berkeley, 1969.

78. Ladanyi B., Roy A. Some aspects of bearing capacity of rock mass // Proceedings, 7th Canadian Symposium on Rock Mechanics. – Edmonton, 1971. – P. 161-190.

79. Lisjak A., Grasselli G. A review of discrete modeling techniques for fracturing processes in discontinuous rock masses // Journal of Rock Mechanics and Geotechnical Engineering. – 2014. – Vol. 6. – № 4. – P. 301-314.

80. Matrosov A. V. et al. Method of initial functions and integral Fourier transform in some problems of the theory of elasticity // Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Physik. – 2020. – Vol. 71. – № 1.

81. Meigh A. C., Wolski W. Design parameters for weak // Design parameters in geotechnical engineering. Proc. 7th European conference on soil mechanics and foundation engineering Brighton, 1979. Vol. 5, (British Geotechnical Society; distributed by T. Telford Ltd., London). – 1981.

82. Nayak G. C., Zienkiewicz O. C. Elasto-plastic stress analysis. A generalization for various constitutive relations including strain softening // International Journal for Numerical Methods in Engineering. – 1972. – Vol. 5. – № 1. – P. 113-135.

83. NCHRP Synthesis 360. Rock-Socketed Shafts for Highway Structure Foundations. – Washington, D.C. : Transportation Research Board, 2006.

84. O’Neil M. W., Reese L. C. Drilled shafts: Construction procedures and design methods. Vol. 53. – 1999.

85. Osterberg J. O., Gill S. A. Load transfer mechanism for piers socketed in hard soils or rock // Proceedings, 9th Canadian Symposium on Rock Mechanics. – Montreal, 1973. – P. 235-261.

86. Palmström A., Singh R. The deformation modulus of rock masses - Comparisons between in situ tests and indirect estimates // Tunnelling and Underground Space Technology. – 2001. – Vol. 16. – № 2.

87. Pells P. J. N., Turner R. M. Elastic solutions for the design and analysis of rock-socketed piles // Canadian Geotechnical Journal. – 1979. – Vol. 16. – № 3. – P. 481-487.
88. Prakoso W. A. Reliability-based design of foundations in rock masses. – Ithaca : Cornell University, 2002.
89. Prakoso W. A., Kulhawy F. H. Uncertainty in capacity models for foundations in rock // Proc. 5th North American Rock Mechanics Symposium. – Toronto, 2002. – P. 1241-1248.
90. Randolph M. F., Wroth C. P. Analysis of deformation of vertically loaded piles // ASCE J Geotech Eng Div. – 1978. – Vol. 104. – № 12.
91. Rosenberg P., Journeaux N. L. Friction and end bearing tests on bedrock for high capacity socket design // Canadian Geotechnical Journal. – 1976. – Vol. 13. – № 3.
92. Rowe R. K., Armitage H. H. A design method for drilled piers in soft rock // Canadian Geotechnical Journal. – 1987. – Vol. 24. – № 1. – P. 126-142.
93. Rowe R. K., Armitage H. H. The design of piles socketed into weak rock. – 1984.
94. Serafim J. L., Pereira J. P. Considerations on the Geomechanical Classification of Bieniawski // Proceedings of International Symposium on Engineering Geology and Underground Openings. – Lisbon, 1983. – P. 1133-1144.
95. Tarnopolskii Yu. M., Zhigun I. G., Polyakov V. A. Spatially Reinforced Composites. – 1993. – 341 p.
96. Turner J. P., Ramey S. B. Base resistance of drilled shafts in fractured rock // Art of Foundation Engineering Practice. – Reston, VA : American Society of Civil Engineers, 2010. – P. 687-701.
97. Vlasov A. N., Volkov-Bogorodsky D. B. Method of asymptotic homogenization of thermoviscoelasticity equations in parametric space: Part I (Theoretical) // Composites: Mechanics, Computations, Applications. – 2018. – Vol. 9. – № 4.
98. Vlasov A. N., Zertsalov M. G., Vlasov D. A. Anisotropic deformation model of jointed rock mass with dilatancy // Rock Mechanics for Natural Resources and

Infrastructure Development- Proceedings of the 14th International Congress on Rock Mechanics and Rock Engineering, ISRM 2019. – London : CRC Press, 2020.

99. Vlasov A. N., Zertsalov M. G., Vlasov D. A. Influence of normal and shear stiffness of fractures on deformation characteristics of rock mass // *Geotechnics Fundamentals and Applications in Construction: New Materials, Structures, Technologies and Calculations*. – London : CRC Press, 2019. – P. 413-419.

100. Walsh J. B. The effect of cracks on the uniaxial elastic compression of rocks // *Journal of Geophysical Research*. – 1965. – Vol. 70. – № 2.

101. Williams A. F., Johnston I. W., Donald I. B. Design of socketed piles in weak rock // *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences & Geomechanics Abstracts*. – 1981. – Vol. 18. – № 2. – P. 33.

102. Williams A. F., Pells P. J. N. Side resistance rock sockets in sandstone, mudstone, and shale // *Canadian Geotechnical Journal*. – 1981. – Vol. 18. – № 4. – P. 502-513.

103. Yoshinaka R., Yamabe T. Joint stiffness and the deformation behaviour of discontinuous rock // *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences and*. – 1986. – Vol. 23. – № 1.

104. Yuan S. C., Harrison J. P. A review of the state of the art in modelling progressive mechanical breakdown and associated fluid flow in intact heterogeneous rocks // *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*. – 2006. – Vol. 43. – № 7. – P. 1001-1022.

105. Zertsalov M., Vlasov D., Minin K. To the problem of determining the deformation characteristics of jointed rock mass // *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. – 2020. – Vol. 869. – № 7. – P. 072045.

106. Zertsalov M., Znamenskiy V., Khokhlov I. About peculiarities of calculating the bearing capacity of socketed shafts in rock under vertical load // *PNRPU Construction and Architecture Bulletin*. – 2018. – Vol. 9. – № 1. – P. 52-59.

107. Zhang L. Method for estimating the deformability of heavily jointed rock masses // *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*. – 2010. – Vol. 136. – № 9.

108. Zhang L., Einstein H. H. Closure to “end bearing capacity of drilled shafts in rock” // Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering. – 1999. – Vol. 125. – № 12. – P. 1109-1110.

109. Zhang L., Einstein H. H. Using RQD to estimate the deformation modulus of rock masses // International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences. – 2004. – Vol. 41. – № 2. – P. 337-341.

110. Zimmer M. A. Seismic velocities in unconsolidated sands: Measurements of pressure, sorting, and compaction effects. – Stanford University, 2004.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Результаты численного моделирования

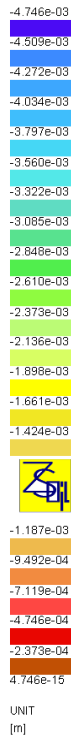
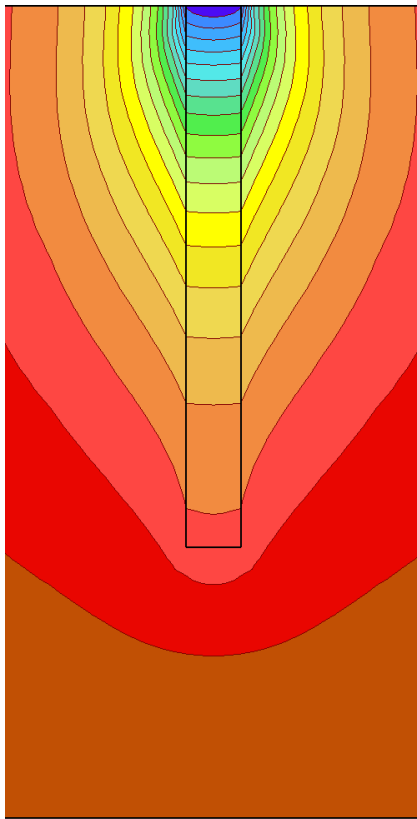


Рисунок П.1 – Распределение вертикальных перемещений

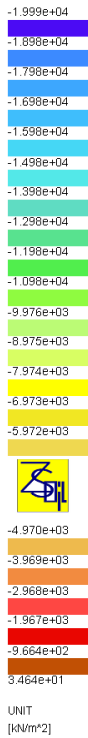
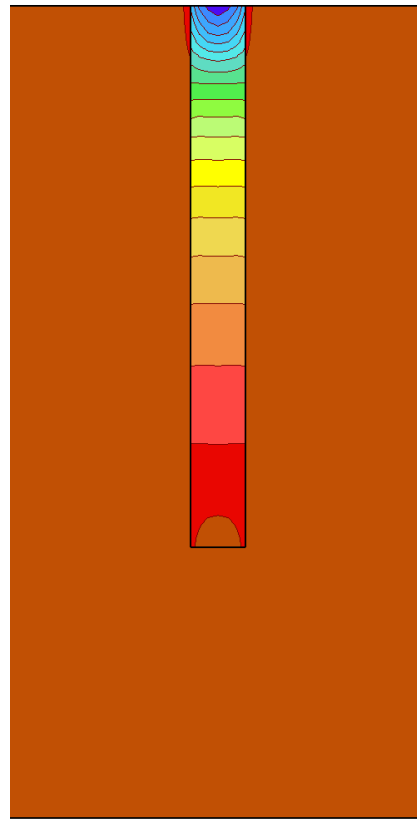


Рисунок П.2 – Распределение вертикальных сжимающих напряжений

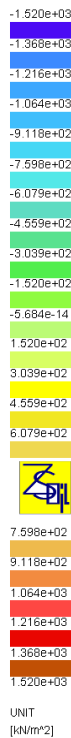
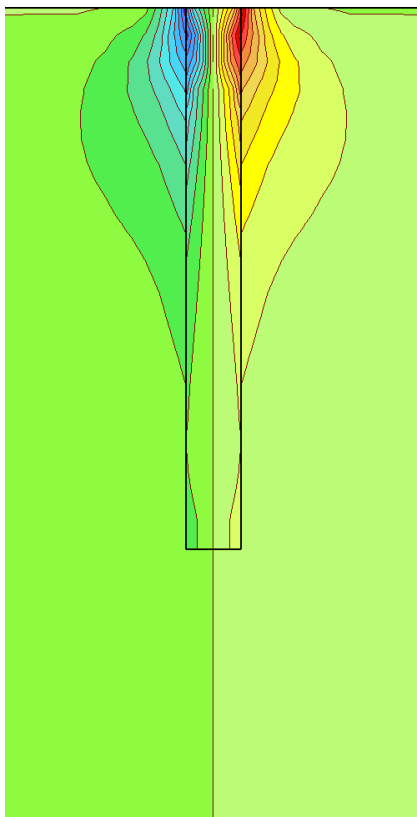


Рисунок П.3 – Распределение касательных напряжений

Параметры модели

- Радиус сваи $R = 1$ м
- Длина сваи $l = 20$ м
- Модуль упругости сваи $E_1 = 30\,000$ МПа
- Коэффициент Пуассона сваи $\nu = 0.3$
- Модуль деформации массива $E_m = 2\,000$ МПа
- Коэффициент Пуассона массива $\nu_m = 0.3$

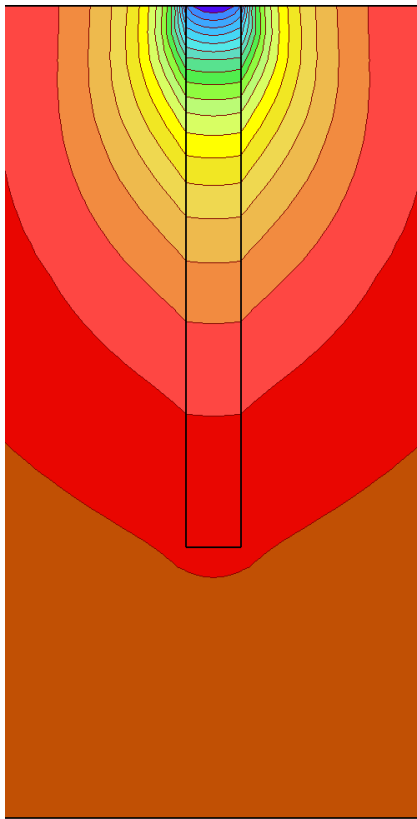


Рисунок П.4 – Распределение вертикальных перемещений

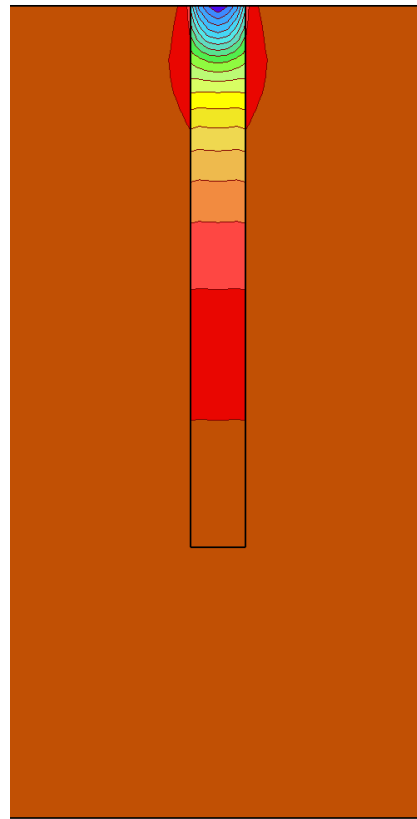


Рисунок П.5 – Распределение вертикальных сжимающих напряжений

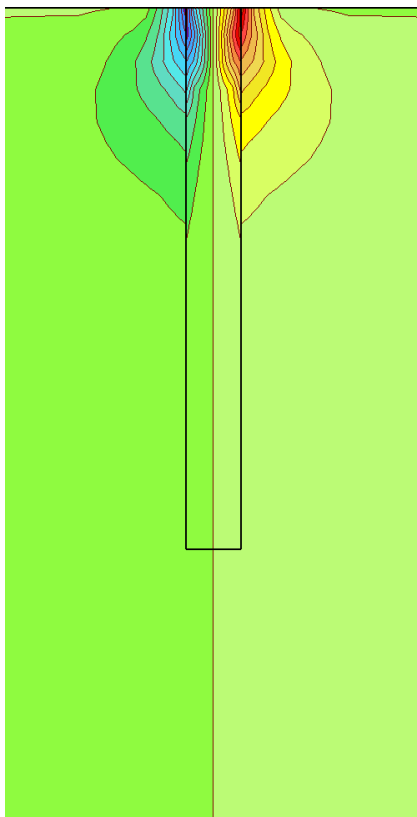


Рисунок П.6 – Распределение касательных напряжений

Параметры модели

Радиус сваи $R = 1$ м
 Длина сваи $l = 20$ м
 Модуль упругости сваи
 $E_1 = 30\,000$ МПа
 Коэффициент Пуассона сваи
 $\nu = 0.3$

Модуль деформации массива
 $E_m = 5\,000$ МПа
 Коэффициент Пуассона массива
 $\nu_m = 0.3$

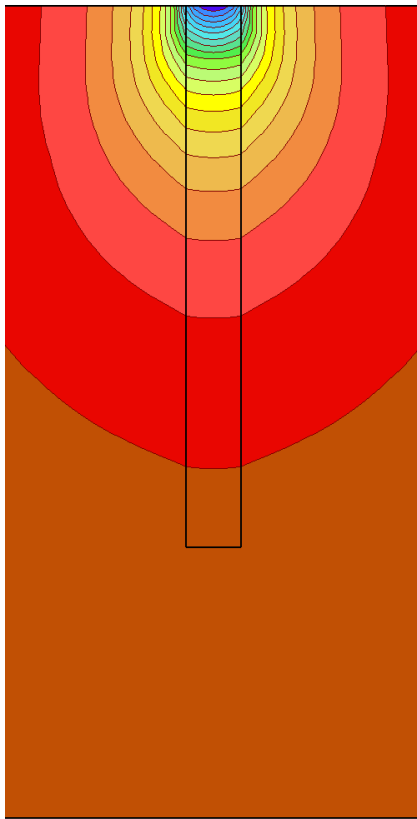


Рисунок П.7 – Распределение вертикальных перемещений

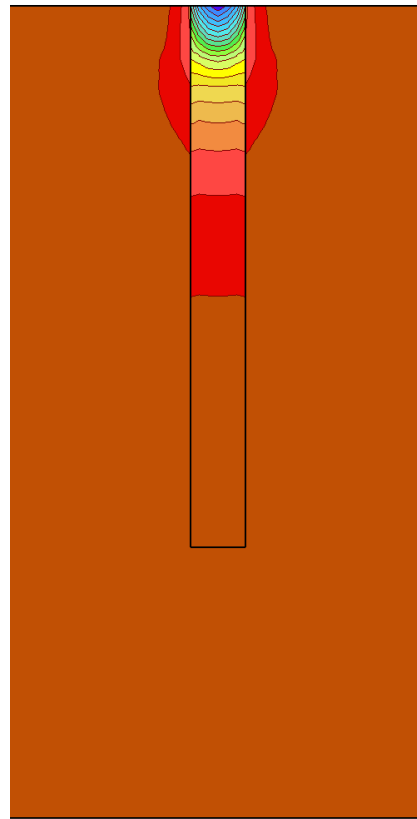


Рисунок П.8 – Распределение вертикальных сжимающих напряжений

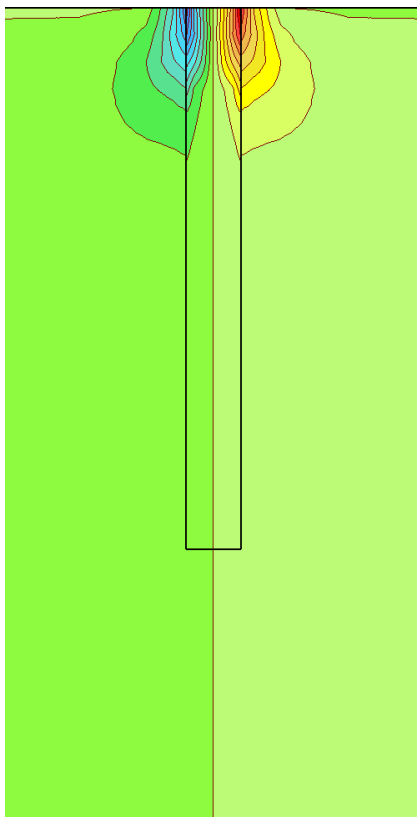


Рисунок П.9 – Распределение касательных напряжений

Параметры модели

Радиус сваи $R = 1$ м
 Длина сваи $l = 20$ м
 Модуль упругости сваи
 $E_1 = 30\,000$ МПа
 Коэффициент Пуассона сваи
 $\nu = 0.3$

Модуль деформации массива
 $E_m = 10\,000$ МПа
 Коэффициент Пуассона массива
 $\nu_m = 0.3$

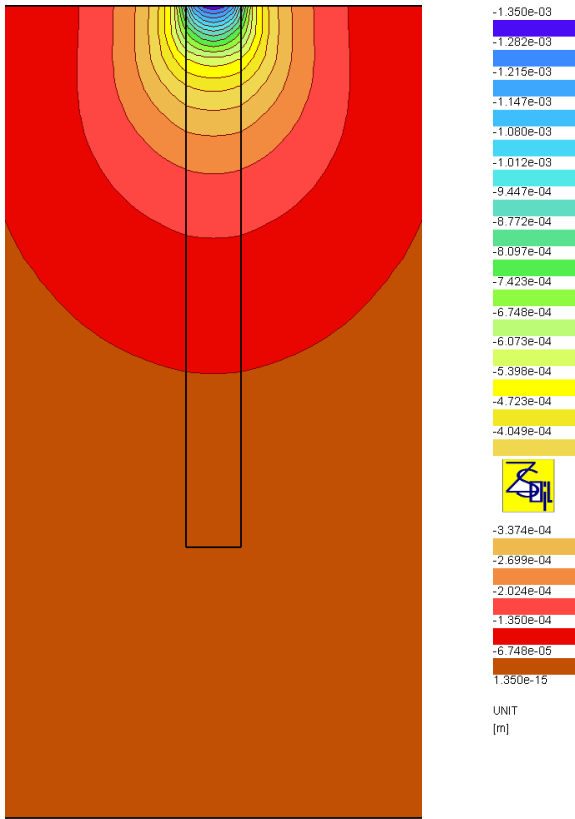


Рисунок П.10 – Распределение вертикальных перемещений

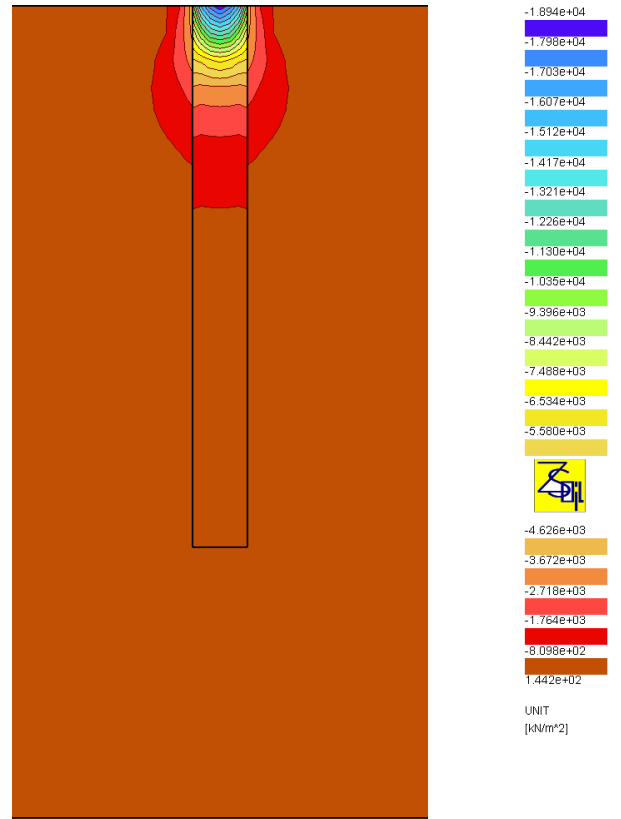


Рисунок П.11 – Распределение вертикальных сжимающих напряжений

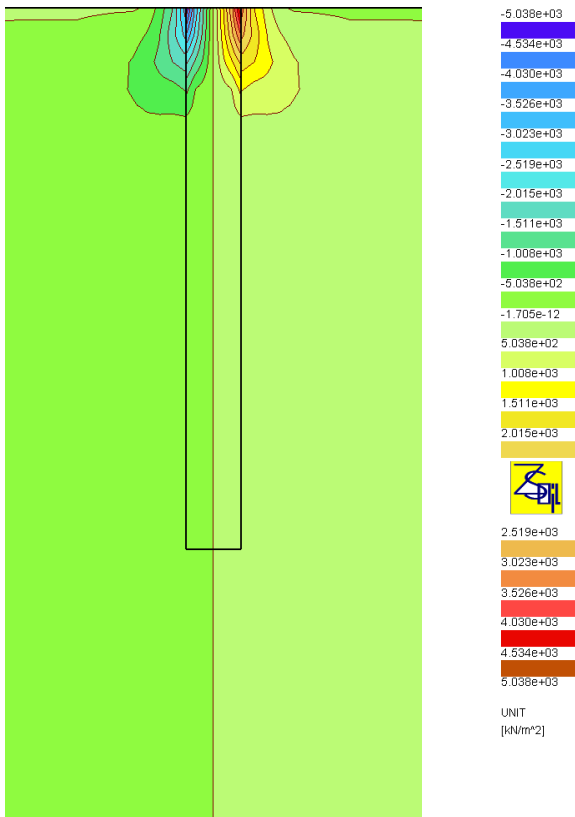


Рисунок П.12 – Распределение касательных напряжений

Параметры модели

Радиус сваи $R = 1$ м
 Длина сваи $l = 20$ м
 Модуль упругости сваи
 $E_1 = 30\,000$ МПа
 Коэффициент Пуассона сваи
 $\nu = 0.3$

Модуль деформации массива
 $E_m = 20\,000$ МПа
 Коэффициент Пуассона массива
 $\nu_m = 0.3$

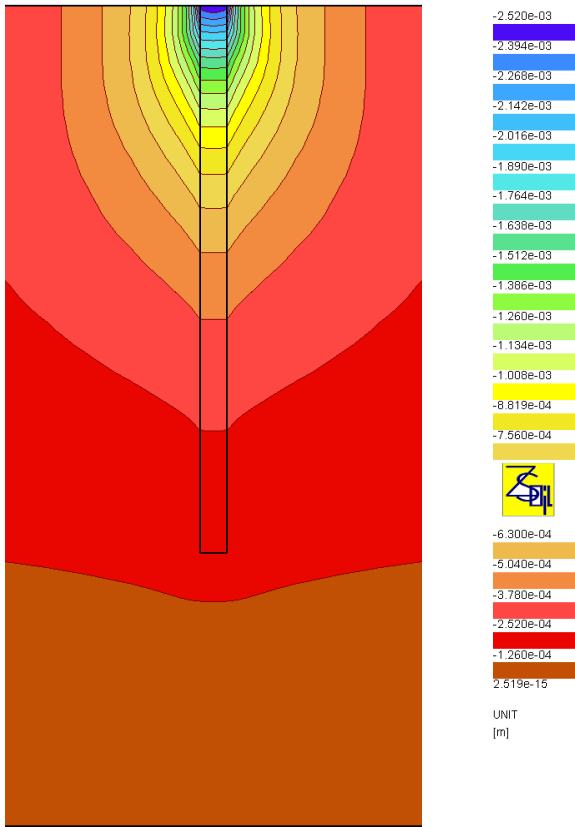


Рисунок П.13 – Распределение вертикальных перемещений

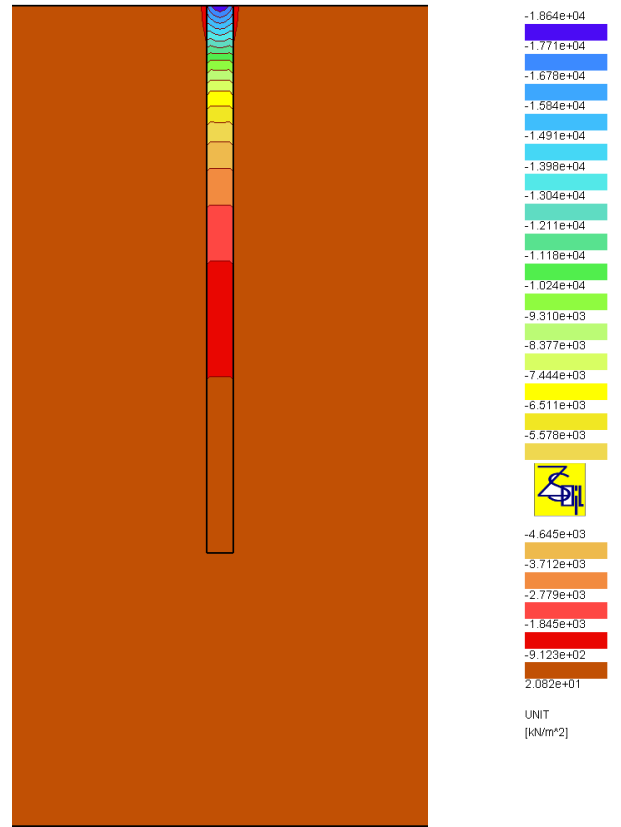


Рисунок П.14 – Распределение вертикальных сжимающих напряжений

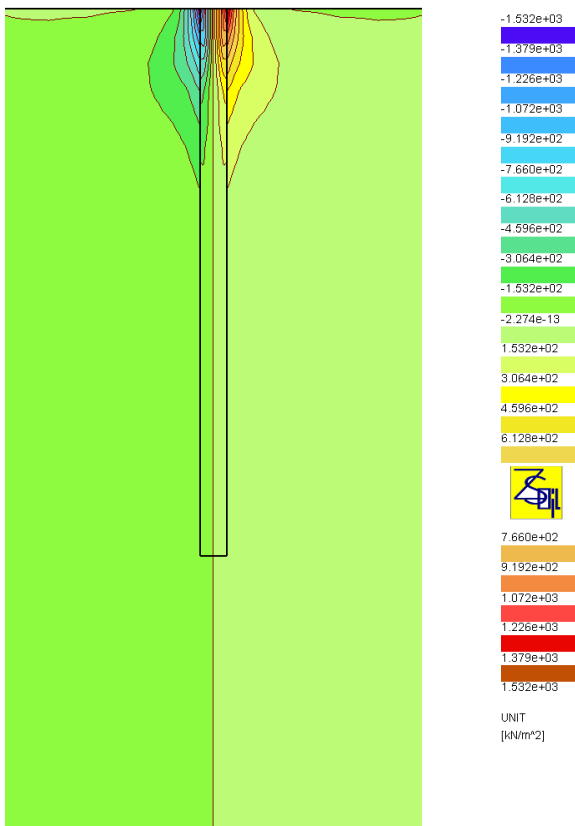


Рисунок П.15 – Распределение касательных напряжений

Параметры модели

Радиус сваи $R = 0.5$ м
 Длина сваи $l = 20$ м
 Модуль упругости сваи
 $E_1 = 30\,000$ МПа
 Коэффициент Пуассона сваи
 $\nu = 0.3$

Модуль деформации массива
 $E_m = 2\,000$ МПа
 Коэффициент Пуассона массива
 $\nu_m = 0.3$

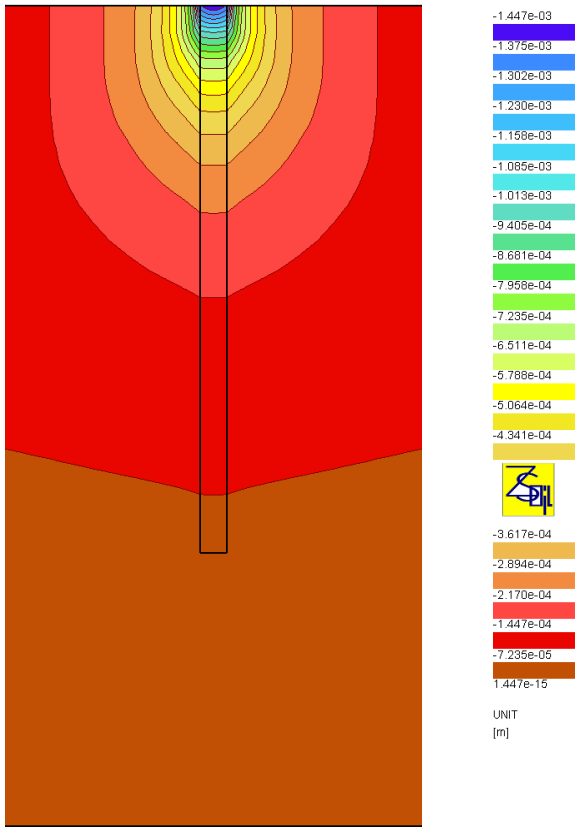


Рисунок П.16 – Распределение вертикальных перемещений

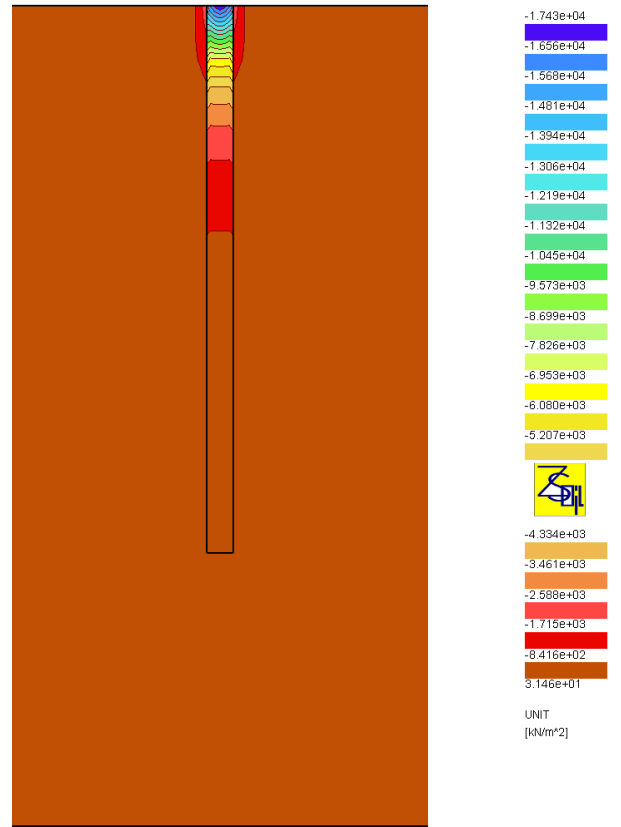


Рисунок П.17 – Распределение вертикальных сжимающих напряжений

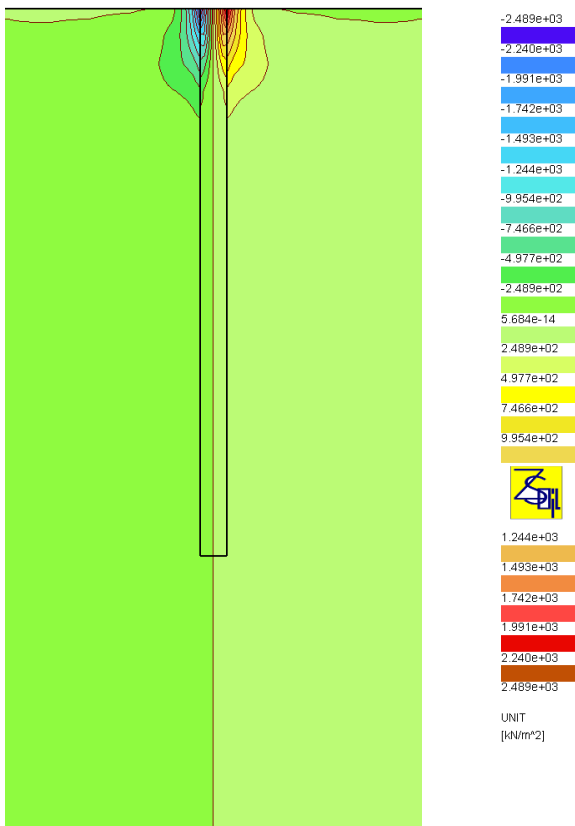


Рисунок П.18 – Распределение касательных напряжений

Параметры модели

Радиус сваи $R = 0.5$ м
 Длина сваи $l = 20$ м
 Модуль упругости сваи
 $E_1 = 30\,000$ МПа
 Коэффициент Пуассона сваи
 $\nu = 0.3$

Модуль деформации массива
 $E_m = 5\,000$ МПа
 Коэффициент Пуассона массива
 $\nu_m = 0.3$

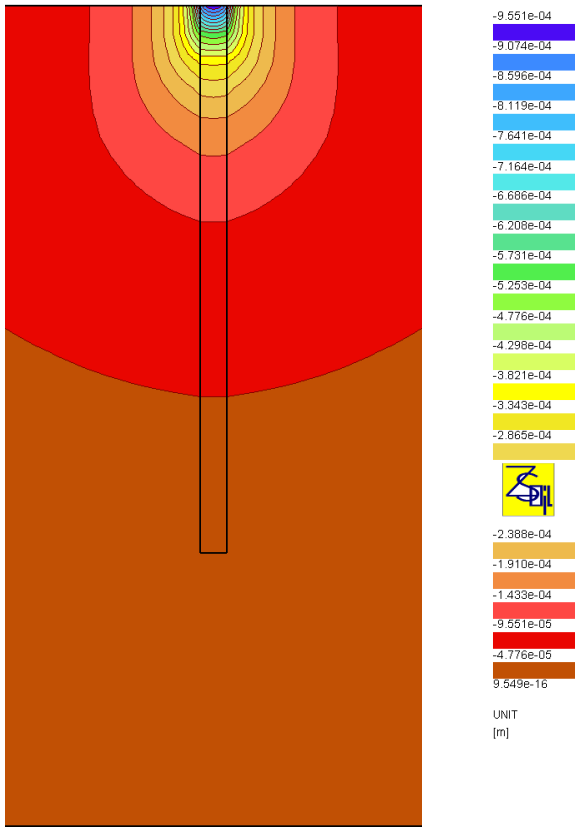


Рисунок П.19 – Распределение вертикальных перемещений

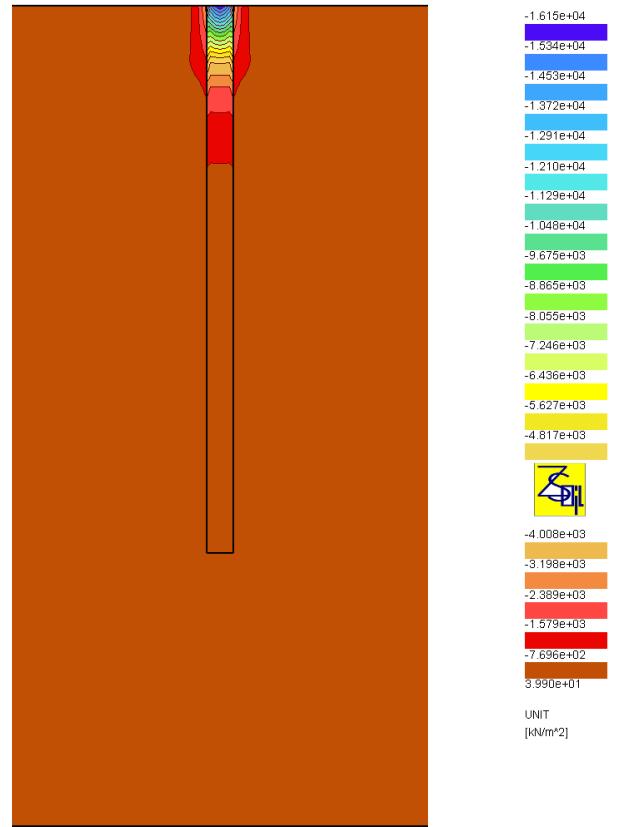


Рисунок П.20 – Распределение вертикальных сжимающих напряжений

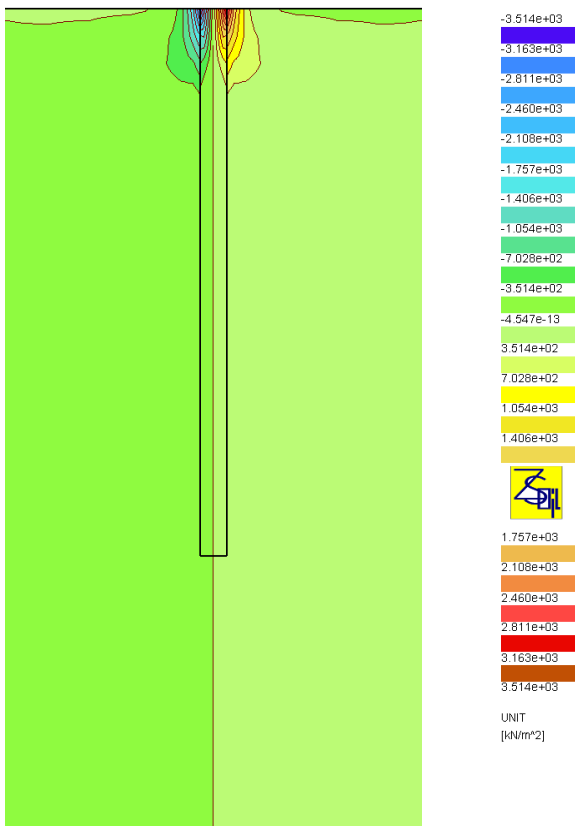


Рисунок П.21 – Распределение касательных напряжений

Параметры модели

Радиус сваи $R = 0.5$ м
 Длина сваи $l = 20$ м
 Модуль упругости сваи
 $E_1 = 30\,000$ МПа
 Коэффициент Пуассона сваи
 $\nu = 0.3$

Модуль деформации массива
 $E_m = 10\,000$ МПа
 Коэффициент Пуассона массива
 $\nu_m = 0.3$

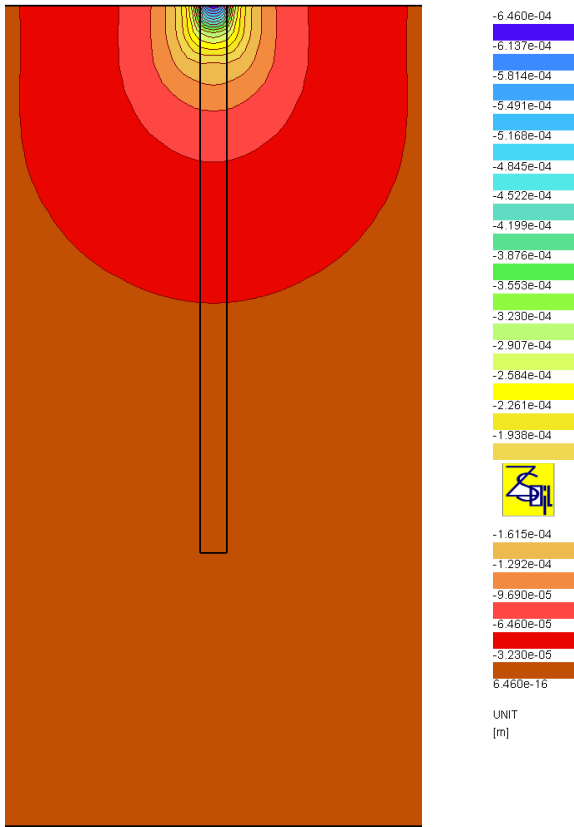


Рисунок П.22 – Распределение вертикальных перемещений

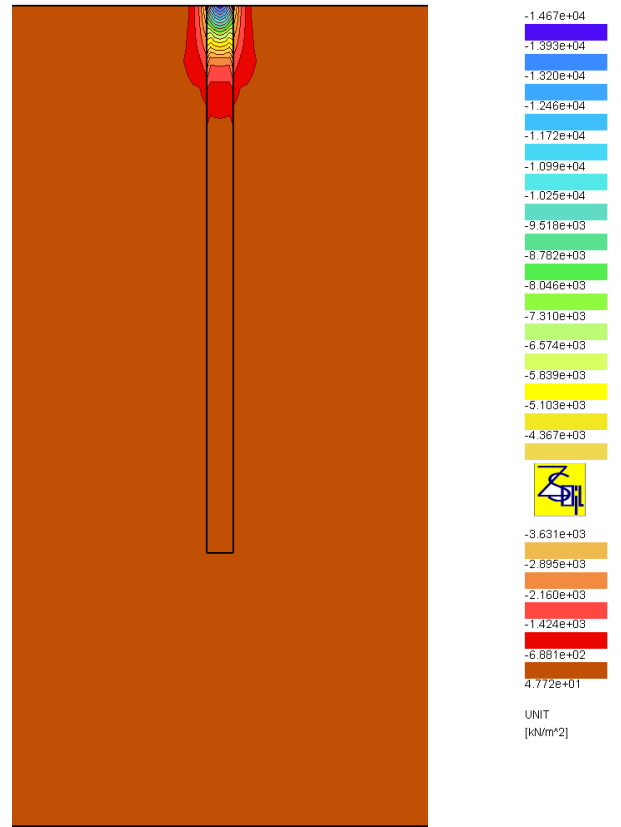


Рисунок П.23 – Распределение вертикальных сжимающих напряжений

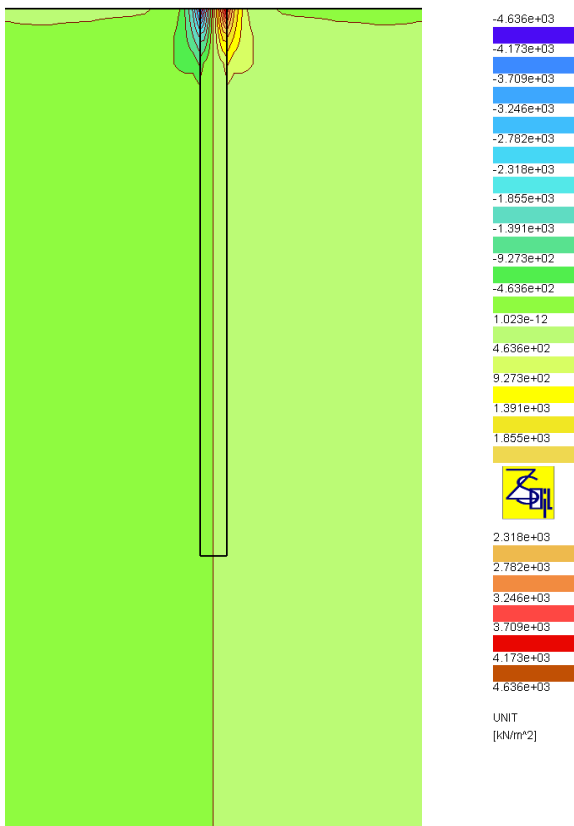


Рисунок П.24 – Распределение касательных напряжений

Параметры модели

Радиус сваи $R = 0.5$ м
 Длина сваи $l = 20$ м
 Модуль упругости сваи
 $E_1 = 30\,000$ МПа
 Коэффициент Пуассона сваи
 $\nu = 0.3$

Модуль деформации массива
 $E_m = 20\,000$ МПа
 Коэффициент Пуассона массива
 $\nu_m = 0.3$