

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ СТРОИТЕЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ПРОГРАММА

дисциплины

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

1. ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ДИСЦИПЛИНЫ

Дисциплина «Строительная механика» является одной из основных базовых дисциплин,

имеет своей целью:

дать современному специалисту необходимые знания, а также приобрести навыки в области анализа работы и расчета конструкций, выполненных из различных материалов, на прочность, жесткость и устойчивость при различных воздействиях с использованием современного вычислительного аппарата.

Ее обучение основано на знании студентами таких общеобразовательных дисциплин, как "Высшая математика", "Физика", "Теоретическая механика", "Сопротивление материалов".

Овладение ее практическими расчетными приемами связано с изучением прикладных дисциплин, как-то: "Металлические конструкции", "Железобетонные и каменные конструкции", "Конструкции из дерева и пластмасс". Материал всех указанных дисциплин логически взаимосвязан с материалом дисциплины "Строительная механика".

Изложение дисциплины "Строительная механика" ведется при постепенном усложнении изучаемого материала в логической последовательности.

Задачи дисциплины: вооружить будущего специалиста необходимыми знаниями для анализа работы и расчета строительных конструкций.

2. ТРЕБОВАНИЯ К УРОВНЮ ОСВОЕНИЯ СОДЕРЖАНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ.

В результате освоения этого курса

знать: основные методы и практические приемы расчета реальных конструкций и их элементов из различных материалов по всем предельным расчетным состояниям на различные воздействия.

уметь: грамотно составить расчетную схему сооружения, произвести ее кинематический анализ, выбрать наиболее рациональный метод расчета при различных воздействиях и найти истинное распределение напряжений, обеспечив при этом необходимую прочность и жесткость его элементов с учетом реальных свойств строительных материалов, используя современную вычислительную технику.

демонстрировать способность и готовность: проводить кинематический анализ расчетной схемы сооружения; определять внутренние усилия, напряжения и перемещения в элементах статически определимых и неопределимых систем современными методами при различных воздействиях.

3. РАЗДЕЛЫ ДИСЦИПЛИНЫ И ИХ СОДЕРЖАНИЕ

.	Введение.	Строительная механика, цель и задачи курса связь с другими дисциплинами.
.	Кинематический анализ сооружений.	Расчетные схемы сооружений, их классификация. Статический и кинематический анализ типов связей и опор. Степень свободы плоской стержневой системы, формулы для ее определения. Образование геометрически неизменяемых систем. Мгновенно изменяемые системы и способы проверки систем на мгновенную изменяемость.
.	Расчет статически определимых систем	Свойства статически определимых систем, методы их расчета на неподвижную нагрузку. Конструирование и расчет многопролетных балок и рам. Поэтажная схема. Расчет трехшарнирных арок и рам. Понятие о рациональной оси арки. Расчет балочных и консольно-балочных ферм с простой решеткой на узловую нагрузку: метод вырезания узлов, метод сечений, графический метод. Внеузловая нагрузка. Понятие линий влияния. Статический способ построения линий влияния. Линии влияния усилий в простой балке, в многопролетных балках и рамах. Кине-

		матический способ построения линий влияния. Загруженные линии влияния неподвижной и подвижной нагрузкой. Линии влияния в трехшарнирных арках, простых фермах.
.	Основные теоремы об упругих системах и определение перемещений в статически определимых системах	Понятие о линейно-деформируемой системе. Обобщенный закон Гука. Обобщенные силы и перемещения. Принцип возможных перемещений. Теорема Клапейрона о работе статически приложенной внешней нагрузки. Работа внутренних сил. Потенциальная энергия упругой системы. Теорема Бетти о взаимности работ. Теоремы о взаимности перемещений, реакций. Построение линий влияния перемещений. Формула Мора для определения перемещений от нагрузки, теплового воздействия и осадки опор. Правило Верещагина и формула Симпсона для вычисления интегралов.
.	Статически неопределимые системы. Метод сил	Свойства статически неопределимых систем. Степень статической неопределимости. Выбор основной системы. Канонические уравнения метода сил. Вычисление коэффициентов канонических уравнений и их проверка. Расчет рам на действие температуры, нагрузки и смещения опор. Проверка окончательных эпюр. Учет симметрии. Вычисление перемещений в статически неопределимых системах.
.	Метод перемещений	Степень кинематической неопределимости при расчете методом перемещений. Основная система. Построение единичных и грузовых эпюр в основной системе. Канонические уравнения метода перемещений. Вычисление коэффициентов. Расчет рам и неразрезных балок на силовые, температурные воздействия. Проверка окончательных эпюр. Использование симметрии.
.	Смешанный метод. Комбинированный способ	Основная система. Построение единичных и грузовых эпюр в основной системе. Канонические уравнения. Вычисление коэффициентов. Построение и проверка окончательных эпюр. Учет симметрии. Комбинация методов сил, перемещений и смешанного при расчете симметричных систем на произвольную нагрузку.
.	Матричная форма метода перемещений расчета стержневых систем (матричный метод)	Машинные методы расчета конструкций стержневых систем методом перемещений в матричной форме. Известные и внешние силы, внутренние усилия и деформации. Приведение внешних воздействий к узловой нагрузке. Матрица внешних сил. Три стороны задачи расчета упру-

	перемещений)	<p>гих стержневых систем:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Уравнения равновесия. Статическая матрица. 2. Связь деформации и перемещений. Деформационная матрица. Принцип двойственности статических и геометрических уравнений. 3. Закон Гука. Матрица податливости и матрица внутренней жесткости. <p>Расчетные формулы метода перемещений в матричной форме.</p>
.	Метод конечных элементов (МКЭ расчета конструкций)	<p>Методы расчета конструкций с помощью ЭВМ. Идея МКЭ. Расчет стержневых систем МКЭ. Матрица жесткости элемента и совокупности элементов. Определение усилий в элементах. Расчет пространственных систем. Особенности расчета континуальных систем МКЭ на примере плоской задачи теории упругости. Формирование матрицы жесткости совокупности элементов. Определение напряжений и деформаций в элементах. Использование улучшенных элементов и элементов других форм.</p>
.	Расчет стержневых систем с учетом пластических свойств материалов	<p>Понятие о предельном состоянии. Разрушающие нагрузки. Гипотезы теории предельного равновесия. Расчет статически определимых и неопределимых ферм с учетом пластических свойств материала. Учет пластических свойств материала в балке при чистом и при поперечном изгибе. Пластический момент сопротивления и пластический шарнир. Расчет статически определимых и неопределимых балок с учетом пластических свойств материала. Основные теоремы о разрушающих нагрузках: статическая, кинематическая и о единственности решения. Метод комбинированных механизмов расчета рам.</p>
0.	Устойчивость сооружений	<p>Основные понятия устойчивости сооружений: виды потери устойчивости, степень свободы, методы решения. Устойчивость систем с конечным числом степеней свободы (статический, энергетический методы). Устойчивость упругих стержней (статический и энергетический методы). Дифференциальное уравнение сжато-изогнутого стержня и его решение методом начальных параметров. Табличные эпюры метода перемещений для сжатых стержней. Учет симметрии при расчете на устойчивость. Деформационный расчет рам.</p>

1.	Динамика сооружений	Основные понятия динамики сооружений: виды динамических нагрузок, степени свободы, методы решения. Свободные колебания системы с одной степенью свободы с учетом и без учета затухания. Свободные колебания систем с конечным числом степеней свободы. Определение частот и форм свободных колебаний. Ортогональность главных форм. Вынужденные колебания системы с одной степенью свободы при различных динамических воздействиях. Динамический коэффициент. Вынужденные колебания систем с конечным числом степеней свободы при вибрационной нагрузке. Понятие об обобщенных силах инерции и их использование при динамическом расчете. Энергетический метод определения частот свободных колебаний. Борьба с вибрациями.
----	----------------------------	---

4. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ.

1.1.

1.2. *Рекомендуемая литература*

1.3.

1.4. *а) основная литература*

1. Леонтьев Н.Н., Соболев Д.Н., Амосов А.А. Основы строительной механики стержневых систем. - М.: АСВ, 1996.
2. Анохин Н.Н. Строительная механика в примерах и задачах. Ч. I. Статически определимые системы: Учеб. Пос. – М.: Изд-во АСВ, 2007.
3. Анохин Н.Н. Строительная механика в примерах и задачах. Ч. II. Статически неопределимые системы: Учеб. Пос. – М.: Изд-во АСВ, 2007.
4. Анохин Н.Н. Динамический расчет стержневых систем с одной степенью свободы: Учеб. Пос. – М.: МГСУ, 2006.

б) дополнительная литература

1. Сеницын С.Б. Строительная механика в методе конечных элементов стержневых систем: Учеб. Пос. – М.: Изд-во АСВ, 2002.
2. Сеницын С.Б. Решение практических задач строительной механики на компьютере: Учеб. Пос. – М.: МГСУ, 2004.

Оглавление

1.	Основные понятия и кинематический анализ сооружений.....	8
1.1.	Расчетная схема сооружений	9
1.2.	Определение числа степеней свободы плоских стержневых систем	10
1.3.	Усилия в мгновенно изменяемых системах	14
1.4.	ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ	16
2.	Статически определимые стержневые системы – балки и фермы	17
2.1.	Многопролетные шарнирно- консольные балки	17
2.2.	Плоские фермы.....	20
2.3.	Способы определения усилий в стержнях фермы	21
2.4.	ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ	24
3.	Трехшарнирные арки	25
3.1.	Определение опорных реакций	25
3.2.	Определение усилий в сечениях арки.....	26
3.3.	Арка с затяжкой.....	27
3.4.	Рациональная ось трехшарнирной арки	28
3.5.	ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ	31
4.	Линии влияния.....	31
4.1.	Определение усилий по линиям влияния	31
4.2.	О замене заданной на прямолинейном участке линии влияния нагрузки ее равнодействующей.....	33
4.3.	Определение положения системы связанных грузов, при котором они вызывают наибольшее усилие.....	33
4.4.	ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ	34

5.	Статически неопределимые системы	35
5.1.	Основные понятия.....	35
5.2.	Основные теоремы об упругих линейно-деформируемых системах. 37	
5.3.	ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ	40
6.	Общая формула перемещений плоской стержневой системы	41
6.1.	Вывод общей формулы перемещений при силовом воздействии	41
6.2.	Упрощения общей формулы	43
6.3.	Правило «перемножения» эпюр Верещагина (1925).....	43
6.4.	Перемещения от теплового воздействия	45
6.5.	Перемещения от осадок опор.....	47
6.6.	ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ	47
7.	Метод сил.....	48
7.1.	Канонические уравнения метода сил (1864. Maxwell).....	48
7.2.	Проверка вычисленных по формулам (6.3) перемещений.	50
7.3.	. Построение окончательной эпюры M	51
7.4.	О вычислении перемещений статически неопределимой системы	52
7.5.	Проверка правильности окончательной эпюры M	52
7.6.	Расчет балок и рам на нагрев и осадки опор.....	53
7.7.	Определение перемещений статически неопределимых систем .	54
7.8.	Особенности применения метода сил к расчету статически неопределимых ферм и арок	56
7.9.	Некоторые приемы упрощения расчета рам методом сил.....	57
7.10.	ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ	58

Основные понятия и кинематический анализ сооружений

Строительная механика – наука, которая занимается разработкой принципов и методов расчета сооружений на прочность, устойчивость и жесткость при действии на них статических и динамических нагрузок, а также изменения температуры или неравномерных осадок опор. Цель расчетов на прочность и устойчивость – обеспечить достаточную, но не излишнюю безопасность сооружений, а расчет на жесткость – устранить возможность появления значительных деформаций сооружений.

Строительная механика включает дисциплины: сопротивление материалов, теорию упругости, теорию пластичности, теорию пластин и оболочек, динамику сооружений, строительную механику стержневых систем. Последняя, в отличие от сопротивлений материалов, занимается не теорией расчета стержня (бруса), а теорией расчета системы брусьев или стержней, образующих сооружение.

1.5. Расчетная схема сооружений

Расчет реального сооружения с учетом всех особенностей его конструкции является сложной и практически нерешаемой задачей. Поэтому, стремясь дать простые, удобные, но достоверные решения, строительная механика вынуждена упрощать условия задачи, отказываться от учета целого ряда второстепенных факторов и учитывать лишь основные факторы, оперировать с расчетными схемами.

Расчетная схема сооружений – это упрощенное изображение действительного сооружения. Она отражает основные свойства, определяющие поведение сооружения под нагрузками, и не учитывает второстепенные факторы, которыми можно пренебречь.

С геометрической точки зрения различают расчетные схемы сооружений: плоские, воспринимающие нагрузку только в одной плоскости, пространственные, воспринимающие приложенную к ним пространственную систему сил; стержневые, состоящие из стержней, т.е. таких элементов, из которых один размер (длина) значительно превышает два других; пространственные тонкостенные, составленные из плит, пластин, оболочек, т.е. таких элементов, у которых размеры по двум направлениям (длина, ширина) значительно превышают толщину; массивные тела, у которых размеры по всем трем направлениям одного и того же порядка.

По способу соединения элементов различают сооружения с шарнирными (фермы), жесткими (рамы) и комбинированными соединениями элементов в узлах.

По направлению опорных реакций сооружения могут быть безраспорными, у которых вертикальная нагрузка вызывает только вертикальные

опорные реакции, и распорными, у которых вертикальные нагрузки вызывают наклонные опорные реакции, горизонтальные составляющие которых называют распором.

По кинематическому признаку стержневые системы могут быть геометрически неизменяемыми, если перемещения узлов возможны только при условии деформаций элементов (стержней). Геометрически изменяемые системы допускают перемещения и изменение своей формы без деформаций элементов, в зависимости от внешнего нагружения. Такие системы являются механизмами и не могут служить в качестве строительных конструкций.

Система называется мгновенно изменяемой, если она допускает бесконечно малые перемещения точек без деформации ее элементов.

Отдельные части (звенья, диски, стержни) считаются абсолютно жесткими. Диски в плоскости имеют три степени свободы.

По статическому признаку стержневые системы разделяются на статически определимые и статически неопределимые.

Статически определимой называется геометрически неизменяемая система, усилия во всех элементах которой, а также в опорных связях можно определить из уравнений равновесия. Все остальные сооружения будут статически неопределимыми.

1.6. Определение числа степеней свободы плоских стержневых систем

Степенью свободы системы тел называется число независимых геометрических параметров, полностью определяющих положение системы.

Введем понятие связи – любое устройство, снижающее число степеней свободы на единицу. В качестве связей применяют шарниры, стержни с шарнирами по концам и опоры.

Число степеней свободы W плоской стержневой системы, состоящей из D дисков, шарнирно связанных между собой III шарнирами, и имеющей C_o опорных стержней определяется по формуле Чебышева

$$W = 3D - 2III - C_o \quad . \quad (1.1)$$

Докажем формулу (1.1). Пока диски не связаны между собой, число степеней свободы равно утроенному числу дисков. Если диск прикрепить к плоскости с помощью цилиндрического шарнира, он может только вращаться вокруг этого шарнира и потеряет две степени свободы. Значит, шарнирное устройство эквивалентно наложению двух связей. Каждый опорный стержень уменьшает число степеней свободы системы на единицу.

При выводе формулы (1.1) предполагалось, что шарнир соединяет два диска, такие шарниры называются простыми. Кратный, сложный шарнир соединя-

ет три и более дисков и эквивалентен $n-1$ простым шарнирам, где n – число соединяемых дисков.

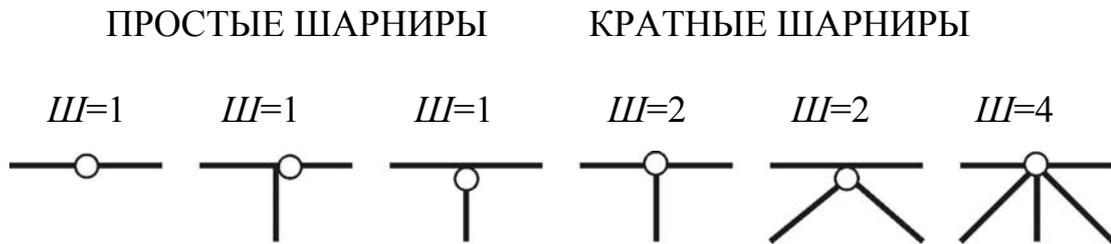


Рис.1

Для шарнирно-стержневой системы (плоской фермы) можно получить более простую формулу, т.к. кратность шарниров всех узлов фермы переменна. Если через U обозначить число узлов в ферме, включая опорные, каждый из которых на плоскости имеет две степени свободы, через C – число стержней системы, C_0 – число опорных стержней, получим формулу

$$W = 2U - C - C_0. \quad (1.2)$$

Второй член формулы (1.2) объясняется просто: два несвязанных узла имеют четыре степени свободы, а соединенные стержнем C образуют диск с тремя степенями свободы, значит введение каждого стержня равно потере одной степени свободы.

Классификация системы по степени свободы

1. $W > 0$ – система геометрически изменяема (механизм) и не может служить в качестве строительной конструкции.
2. $W < 0$ – система геометрически неизменяема и содержит избыточные или лишние связи, причем число лишних связей

$$L = -W + 3K, \quad (1.3)$$

где K – число замкнутых бесшарнирных контуров.

3. $W = 0$ – система геометрически неизменяема и не содержит лишних связей.

Условия 2 и 3 являются необходимыми, но недостаточными, т.к. связи могут быть расположены неправильно.

Для того чтобы выяснить, является ли система геометрически неизменяемой, необходимо выполнить анализ геометрической структуры системы, который состоит в рассмотрении расположения связей и закона соединения элементов.

Например, из двух балок и ферм, показанных на Рис.2, первые неизменяемы, а вторые имеют геометрически изменяемую часть.

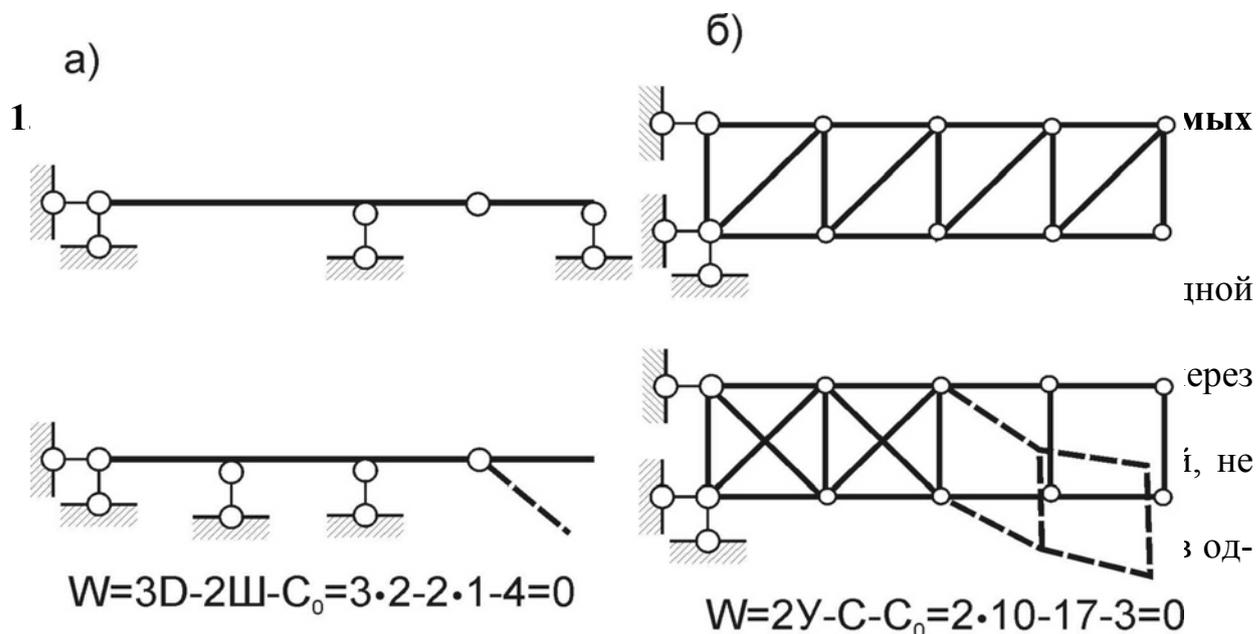


Рис.2

Иллюстрацией служит Рис.3, где слева показаны геометрически неизменяемые системы, соответствующие названным четырем принципам, а справа – оговоренные исключения, приводящие к мгновенно изменяемым системам.

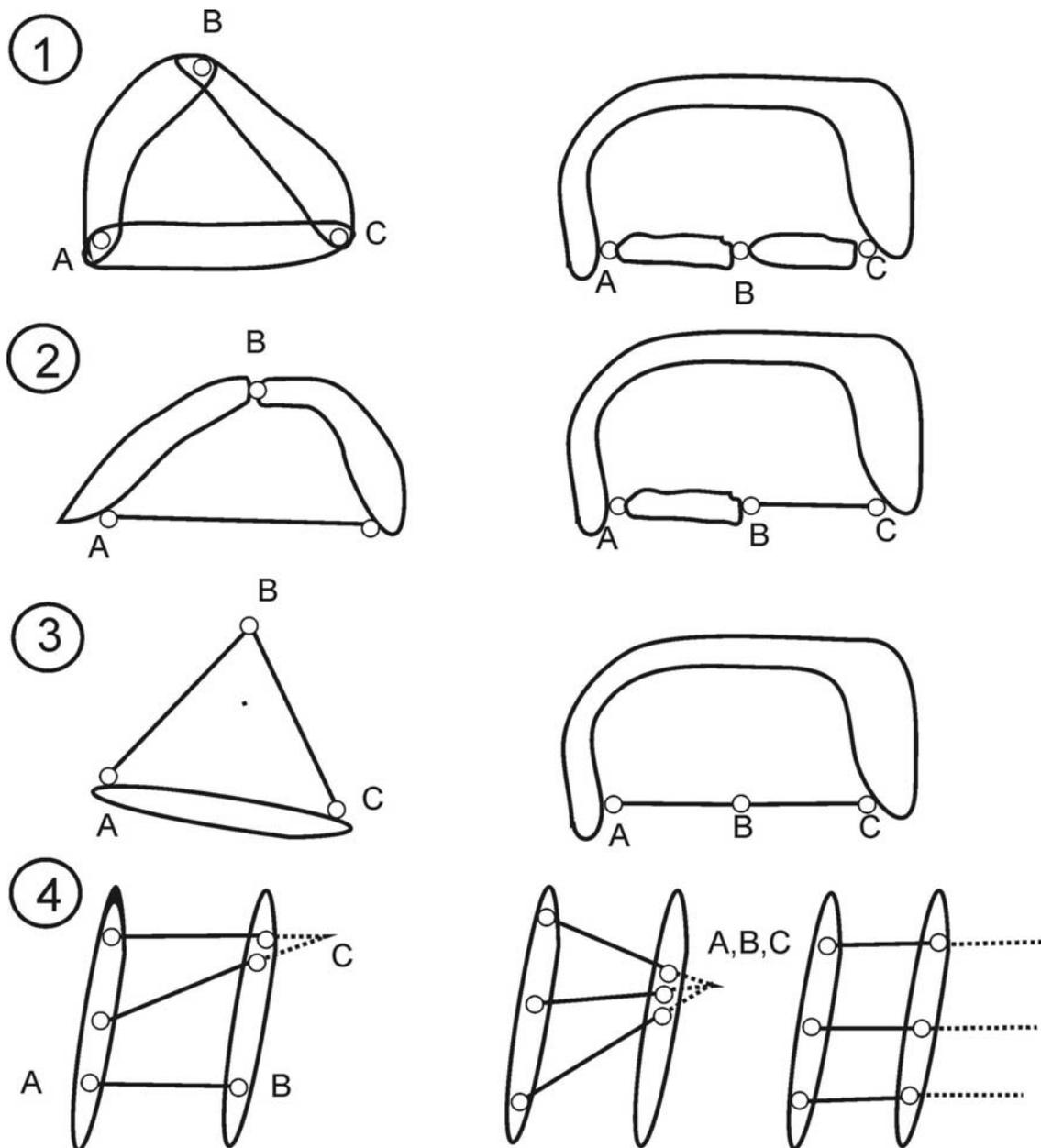


Рис.3

Внимательное рассмотрение всех принципов показывает, что все они основаны на построении шарнирного треугольника – простейшей геометрически неизменяемой фигуры, с действительными или фиктивными шарнирами А, В, С. Если шарнирный треугольник вырождается в прямую или в точку, то система становится мгновенно изменяемой.

Мгновенно изменяемые системы

Мгновенно изменяемыми системами называют системы, допускающие без деформации их элементов бесконечно малые перемещения.

Рассмотрим простейшую систему из двух дисков (ферма Мизеса) на Рис.4а.

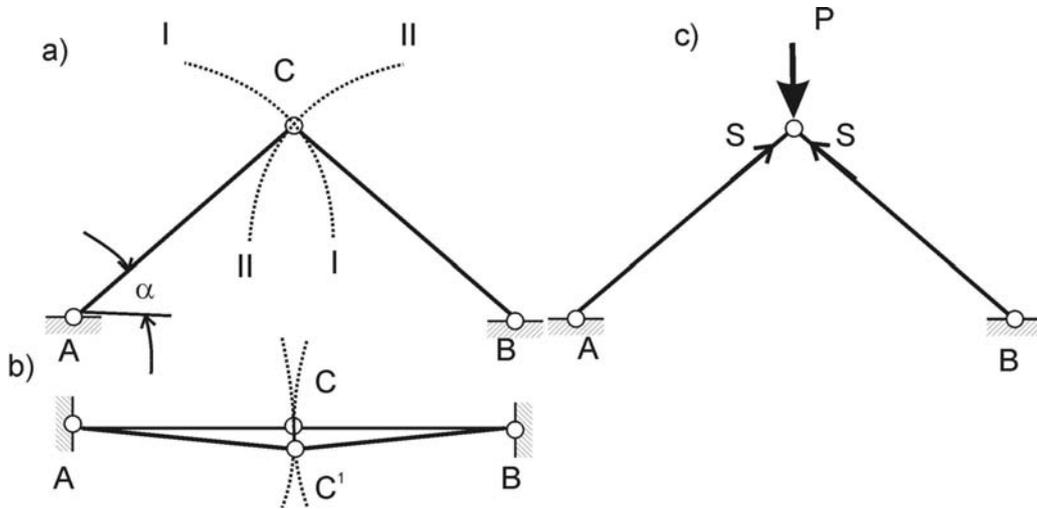


Рис.4

В соответствии с первым принципом это неизменяемая система, если считать два диска-стержня и третий диск-земля соединяются тремя шарнирами А, В и С, не лежащими на одной прямой. Кроме того, в соответствии с третьим принципом можно считать, что к диску-земле присоединяется новый узел с помощью двух стержней, не лежащих на одной прямой.

Доказать неизменяемость системы просто. Мысленно разъединим стержни. Точка С станет описывать окружность I-I радиусом АС с центром в точке А. Эта же точка С станет описывать окружность II-II радиусом СВ с центром в точке В. Но в действительности точка С принадлежит обоим дискам, поэтому перемещение точки С одновременно по кривым I-I и II-II невозможно. Следовательно, система АВС неизменяема. Если угол $\alpha \rightarrow 0$, то система вырождается в показанную на Рис.4б, в этом случае в точке С окружности имеют общую касательную, следовательно, возможно бесконечно малое перемещение, точка С перемещается в точку С¹. Следовательно, это мгновенно изменяемая система.

1.7. Усилия в мгновенно изменяемых системах

Приложим вертикальную силу P в точке С на Рис.4с. Найдём усилия S , равные в двух стержнях в силу симметрии системы, или вырезая узел С и проектируя все силы на горизонталь. Проектируя все силы, приложенные к узлу С на вертикальную ось, находим

$$2S \sin \alpha - P = 0; \Rightarrow S = P / 2 \sin \alpha. \quad \text{Если } \alpha = 0, S = \infty.$$

Следовательно, усилия в мгновенно изменяемых системах теоретически стремятся к бесконечности, что практически невозможно, т.к. система разрушится при конечных больших усилиях, а их перемещения становятся очень большими по сравнению с геометрически неизменяемыми системами.

Применение мгновенно изменяемых систем в строительстве недопустимо, необходимо также избегать систем, близких к мгновенно изменяемым, т.к. в них появляются очень большие усилия и перемещения при конечных нагрузках.

Примеры:

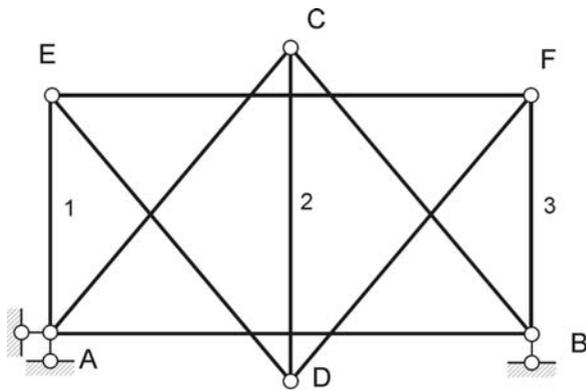


Рис.5

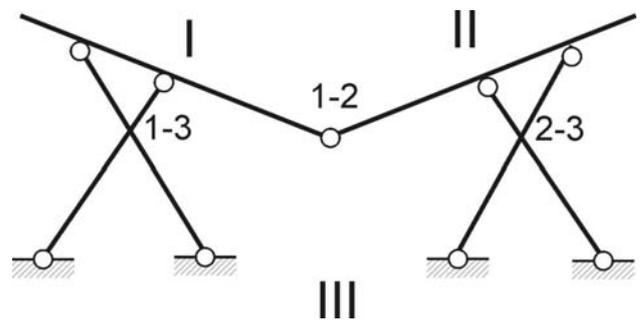


Рис.6

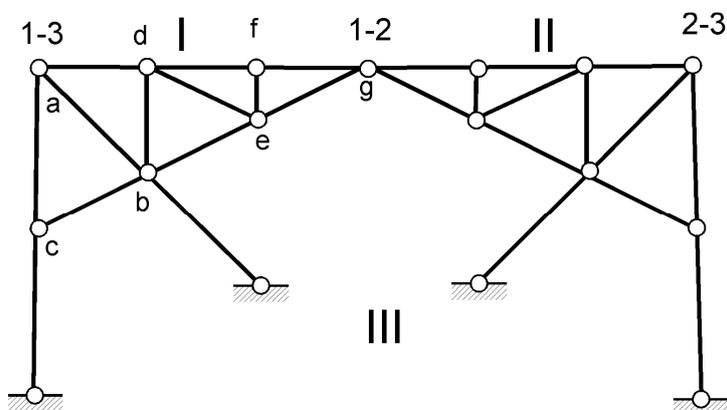


Рис.7

Система, показанная на Рис.5, мгновенно изменяема, т.к. образована из двух треугольников ABC и DEF, соединенных друг с другом параллельными стержнями 1, 2 и 3.

Система, показанная на Рис.6, мгновенно изменяема, если три мгновенных центра вращения дисков I, II и земли III относительно друг друга 1-2; 1-3 и 2-3 находятся на одной прямой.

Система, показанная на Рис.7, также мгновенно изменяема. Диск I образован треугольником abc (1-й принцип) и последовательным присоединением к нему узлов d , e , f и g (3-й принцип). Точно так же образован диск II. Далее, как и в предыдущем примере, находятся точки 1-3, 1-2 и 2-3, а они находятся на одной прямой.

Множество примеров с подробным объяснением можно найти в книге Н.Н.Анохина «Строительная механика в примерах и задачах», а также задачи для самостоятельного решения с ответами к ним.

В последнее время, особенно после известных катастроф, возобновился интерес к полузабытому понятию «живучести» системы. Под нею понимается конструкционная неизменяемость сооружения. Вообще можно условно численно считать число живучести равным числу лишних связей конструкции. То есть, если живучесть равна нулю, то в системе отсутствуют лишние связи, и выход из строя любой связи-опоры, стойки или элемента фермы, рамы и т.п. приведет к обрушению всей конструкции. Чем больше лишних связей, тем больше повышается живучесть конструкции, но при условии правильного распределения связей как внутри конструкции, так и связей с землей.

Основные допущения строительной механики

1. Предположение об идеальной упругости материала элементов расчетных схем, его непрерывности.
2. Принят линейный закон между напряжениями и деформациями (закон Гука).
3. Принцип суперпозиции или принцип независимости действия сил (результат действия системы сил равен сумме результатов действия отдельных сил).

1.8.ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Что называется степенью свободы плоской стержневой системы?
2. Что такое мгновенно изменяемая система?
3. Приведите формулы для определения числа степеней W различных систем. Какая из этих формул является общей?
4. Объясните, почему в вышеупомянутых формулах перед буквами D и III стоят коэффициенты «+3» и «-2».
5. Назовите три возможных случая в зависимости от числа степени свободы системы.
6. В каких случаях и почему для суждения о неизменяемости и неподвижности сооружения необходимо произвести анализ его геометрической системы?
7. Почему мгновенно изменяемые сооружения не применяют в практике строительства?

2. Статически определимые стержневые системы – балки и фермы

В статически определимых системах все внутренние усилия – изгибающие моменты, поперечные силы, осевые усилия, а также реакции в опорных связях могут быть определены из уравнений статики.

В курсе сопротивления материалов был рассмотрен расчет простейших балок и рам, в курсе теоретической механики – расчет ферм. Традиционно изучение строительной механики начинают именно с этих простейших статически определимых систем в качестве повторения и закрепления полученных ранее навыков расчета.

2.1. Многопролетные шарнирно- консольные балки

Это совокупность простых балок, имеющих консоли и связанных между собой промежуточными шарнирами. Опорные реакции в них можно определить как непосредственно по расчетной схеме, так и по ее поэтажной схеме, на которой выделяют главные и второстепенные. В первом случае кроме трех уравнений статики составляют выражения моментов от всех сил, расположенных слева или справа от промежуточных шарниров и приравнивают их нулю. Во втором случае расчет начинают с второстепенных балок на нагрузку, которая к ней приложена. Далее нижележащие балки рассчитывают на свою нагрузку и на опорные реакции, приходящие к ним с верхних балок и т.д., последовательно с «верхних» этажей к нижним.

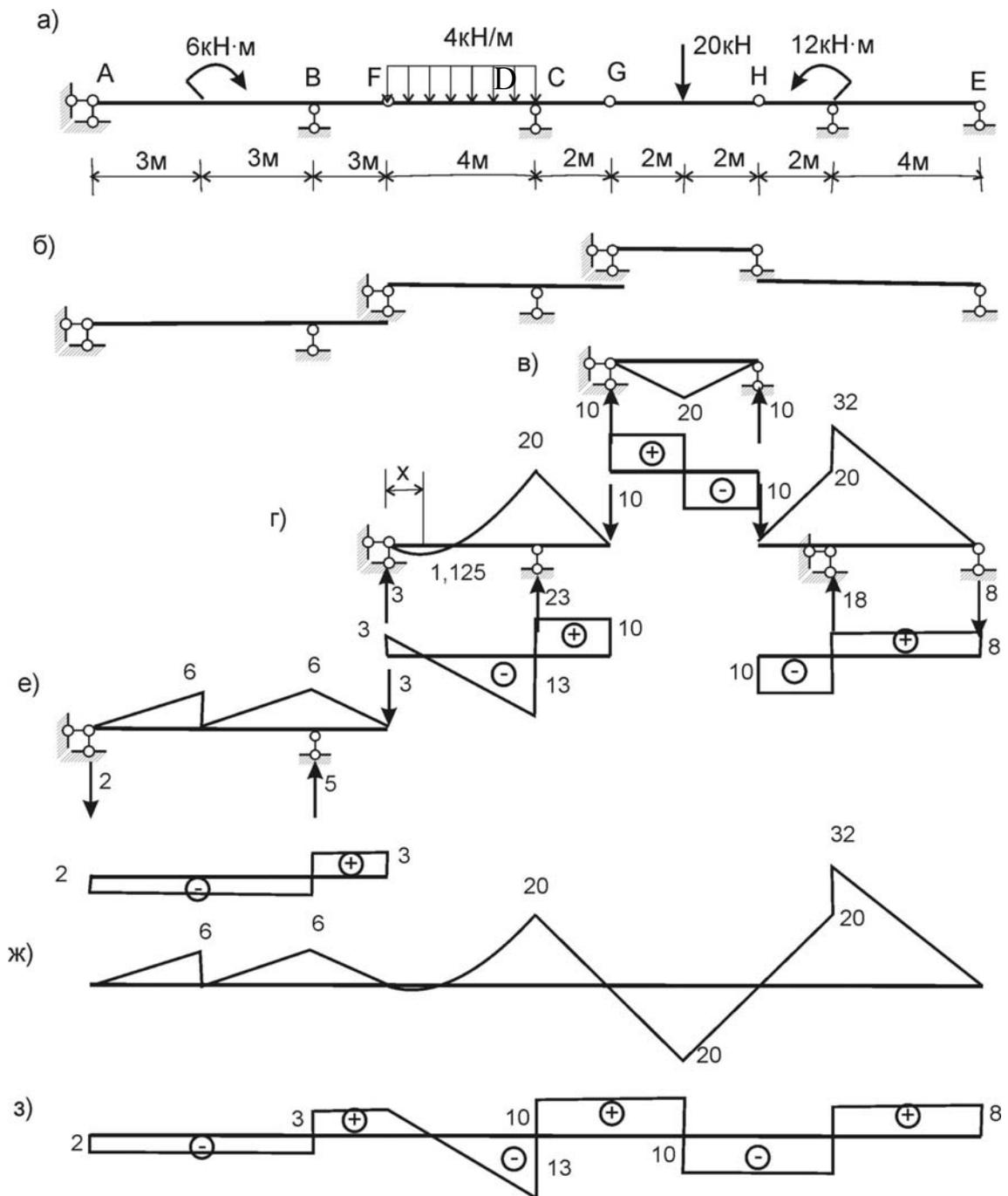


Рис.8

Пример 1. Построить эпюры M и Q для балки на Рис.8а. Здесь размеры заданы в метрах (м), сосредоточенные силы в килоньютонах (кН), распределенные нагрузки в кН/м, сосредоточенные моменты в кН·м. Поэтажная схема показана на Рис.8б. Расчет начинается с второстепенной балки GH.

Находятся из уравнения моментов относительно опор реакции $R_G = R_H = 10 \text{ кН}$ и строятся эпюры M и Q . Затем рассчитывается второстепенная балка FCG или основная балка HDE. На балку FCG действует равномерно распределенная нагрузка $q = 3 \text{ кН/м}$ и опорная реакция $R_G = 10 \text{ кН}$ от вышеле-

жащей балки GH, направленная вниз (в соответствии с 3-м законом Ньютона). Найдем реакции $R_F = 3$ кН, $R_C = 23$ кН.

На консоли CG эюра линейна, $M_C = 10 \cdot 2 = 20$ кН, растянуты верхние волокна, а в пролете FC эюра будет квадратичной, $M_x^{лев} = 3x - 4x \cdot x/2 = 3x - 2x^2$. На этом участке возможен максимальный момент в сечениях, где поперечная сила $Q = 0$. Напоминаем, что $Q = dM/dx$, следовательно в точке экстремума функции ее производная равна нулю. $Q = dM/dx = 3 - 4x = 0$, поэтому $x = 0,75$. Соответствующий момент $M_{x=0,75} = 3 \cdot 0,75 - 2 \cdot 0,75^2 = 1,125$ кН. Балка HDE рассчитывается на действие сосредоточенного момента $m = 12$ кН·м и опорной реакции R_H , действующей вниз. Составляя уравнения моментов относительно опор D и E, находим опорные реакции $R_D = 18$ кН и $R_E = 8$ кН. Эюры M и Q строятся просто.

Аналогично рассчитывается основная балка ABF на действие момента $m = 6$ кН·м и опорной реакции R_F , направленной противоположно реакции вышележащей балки FCG.

На Рис.8ж,з построены общие эюры M и Q для всей балки.

Напомним правила контроля построенных эюр:

1. На ненагруженном участке эюра M линейна, эюра Q - постоянна.
2. В точке приложения сосредоточенной силы в эюре M перелом, направленный в сторону действия силы, а на эюре Q - скачок, равный силе.
3. В точке приложения сосредоточенного момента на эюре M должен быть скачок на величину этого момента.
4. На участке с равномерно распределенной нагрузкой эюра M строится по закону квадратной параболы, выпуклостью направленной в сторону действия нагрузки, эюра Q - линейна. В точках, где $Q = 0$, $M = M_{\max}$.
5. Момент в шарнире равен нулю.
6. Все узлы конструкции должны быть в равновесии $\sum M_{узда} = 0$.
7. Проверку правильности построения эюр Q и N выполняют путем удовлетворения условий равновесия всей конструкции, отрезанной от опор, под действием внешних сил и опорных реакций, взятых из эюр Q и N .

2.2. Плоские фермы

Геометрически неизменяемая система, составленная из стержней, соединенных шарнирами, называется фермой. Если оси всех стержней, включая и опорные, а также силы, действующие на ферму, лежат в этой плоскости, то такая ферма называется плоской.

В фермах внешняя нагрузка передается только в узлы и вызывает в стержнях только осевые усилия или продольные силы.

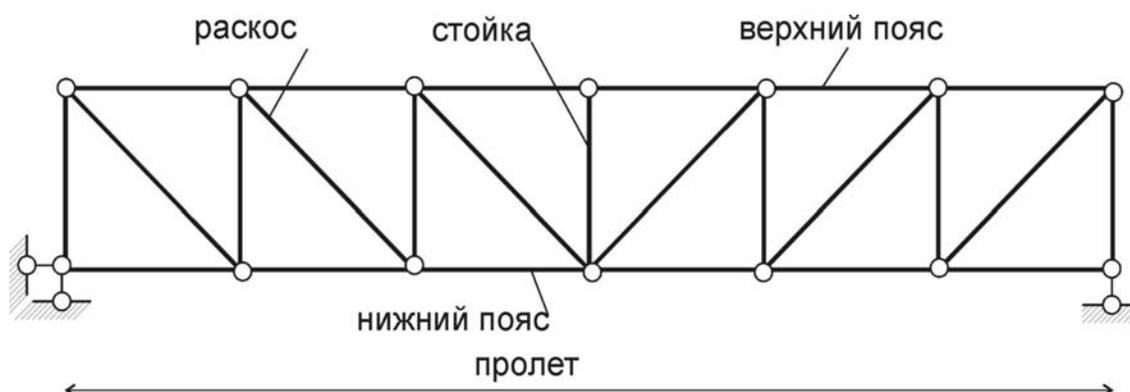


Рис.9

Совокупность элементов, окаймляющих ферму сверху и снизу, называются соответственно верхним и нижним поясом. Все остальные элементы, соединяющие пояса, образуют решетку фермы. Вертикальные стержни решетки называются стойками, наклонные – раскосами, а расстояние между соседними узлами одного пояса фермы называют панелью (Рис.9).

Фермы разделяют на отдельные типы:

- 1) По направлению опорных реакций, возникающих от вертикальных нагрузок, фермы делятся на безраспорные, или балочные и распорные, или арочные.
- 2) По очертанию внешнего контура – треугольного очертания, трапециодального очертания, с параллельными поясами.
- 3) По типу решетки – с треугольной решеткой, состоящей только из раскосов, с раскосной решеткой, состоящей попеременно из стоек и раскосов, нисходящих или восходящих к середине фермы, двухрешетные, шпренгельные, состоящие из основной фермы (раскосной или треугольной) и дополнительных ферм – шпренгелей.
- 4) По назначению – стропильные, крановые, мостовые.

Фермы имеют преимущество перед балками. При работе балки на изгиб, на совместное действие изгиба с продольными силами нормальные напряжения распределяются по сечению балки неравномерно. Значительная часть материала изгибаемой балки используется не полностью. Если стержень работает только на продольные силы, материал используется полнее, масса конструкции при

этом может быть значительно уменьшена. В стержнях ферм возникают только продольные усилия.

При одинаковой с балкой массе ферма всегда выдерживает бóльшие нагрузки, чем балки сплошного поперечного сечения, выполненного из того же материала. Особенно заметно преимущество фермы перед балкой при больших пролетах и больших нагрузках, балки сплошного сечения при таких условиях практически неприменимы.

В действительности элементы металлических ферм соединяются между собой не шарнирами, а жестко, сварными швами или заклепками. Расчеты показали, что деформации, усилия и напряжения в стержнях расчетной схемы фермы с шарнирами не сильно (в пределах нескольких процентов) отличаются от значения этих величин при жестких узлах.

2.3. Способы определения усилий в стержнях фермы

Вначале определяются опорные реакции в ферме, используя уравнения статики, т.к. в статически определимых балочных фермах всегда присутствуют три опорные связи, а в распорных – четыре, опорные реакции находят как в трехшарнирных рамах.

Внутренние усилия в стержнях фермы определяют методом сечений. В зависимости от вида проведенного сечения различают три основных способа аналитического расчета: способ моментной точки, способ проекций и способ вырезания узлов.

1) Способ моментной точки состоит в следующем:

Мысленно разрезают ферму на две части так, чтобы в сечение попало не больше трех стержней с неизвестным усилием. Направление усилий задаем от узла (растяжение), другую часть фермы мысленно отбрасывают. В оставшейся части фермы составляют уравнение моментов относительно моментной точки (точка Риттера). Моментной точкой называется точка, в которой пересекаются направления всех стержней, попавших в сечение, кроме искомого.

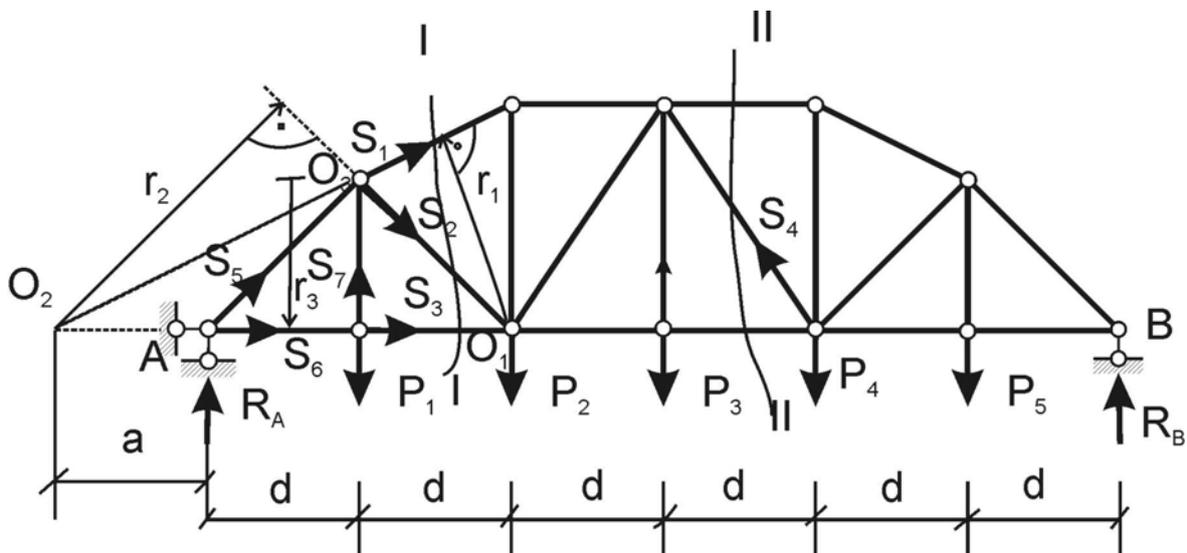


Рис.10

Для определения усилия S_1 фермы, показанной на Рис.10, проведем сечение I-I, отбросим правую часть, как содержащее большее количество сил, а ее действие на оставшуюся левую часть заменяем неизвестными силами S_1, S_2 и S_3 , направленными от узлов. Моментная точка O_1 находится на пересечении стержней с усилиями S_2 и S_3 . Составим уравнение моментов всех сил левой части относительно точки O_1 :

$$\sum M_{O_1}^{лев} = R_A \cdot 2d - P_1 d + S_1 r_1 = 0; \quad S_1 = \frac{(P - 2R_A)d}{r_1}$$

Аналогично находятся усилия S_2 с моментной точкой O_2 и S_3 с моментной точкой O_3 :

$$\sum M_{O_2}^{лев} = -R_A a + P_1(a + d) + S_2 r_2 = 0; \quad S_2 = \frac{R_A a - P_1(a + d)}{r_2};$$

$$\sum M_{O_3}^{лев} = R_A d - S_3 r_3 = 0; \quad S_3 = \frac{R_A d}{r_3}.$$

2) Способ проекций применяется при расчете ферм с параллельными поясами.

В этом случае моментная точка для раскосов и стоек находится в бесконечности, поэтому можно проектировать все силы отсеченной части на ось, перпендикулярную поясам фермы.

Определим усилие S_4 , проведя сечение II-II, и запишем уравнение равновесия правой части:

$$\sum Y^{np} = R_B - P_4 - P_5 + S_4 \cos \beta = 0; \quad S_4 = \frac{1}{\cos \beta} (P_4 + P_5 - R_B).$$

- 3) Способ вырезания узлов является частным случаем способа проекций – производятся такие разрезы, отсекающие от фермы по одному узлу.

Начинают вырезать узлы, в которых не более двух неизвестных усилий, которые определяются из двух условий равновесия ($\sum X = 0$; $\sum Y = 0$), или на оси, перпендикулярные к стержням с искомыми усилиями. Последовательно вырезая узлы, можно определить усилия во всех стержнях фермы.

Способ вырезания узлов позволяет вывести частные случаи равновесия:

1. Ненагруженный двухстержневой узел – усилия в обоих стержнях равны нулю $S_1 = S_2 = 0$ (Рис.11а).
2. Если в узле сходятся три стержня, два из которых направлены одинаково и нет нагрузки, то в отдельно направленном стержне усилие равно нулю $S_3 = 0$ (нулевой стержень), а усилия в двух других стержнях равны $S_1 = S_2$ (Рис.11б).
3. В трехстержневом узле, оси двух стержней лежат на одной прямой, а вдоль одиночного стержня действует сила P , то усилие в одиночном стержне равно силе, а усилия в двух других стержнях равны (Рис.11в).

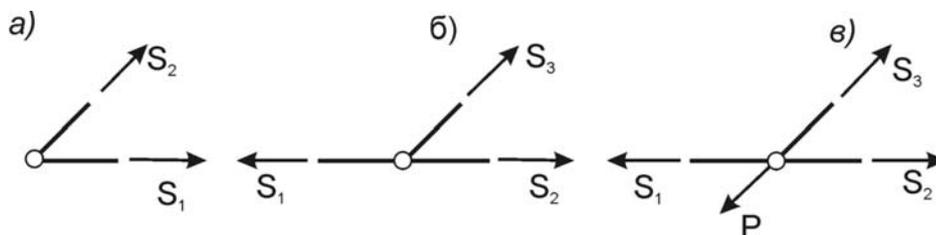


Рис.11

Найдем усилие для фермы, изображенной на Рис.10. Вырежем узел, принадлежащей опоре А (Рис.12а).

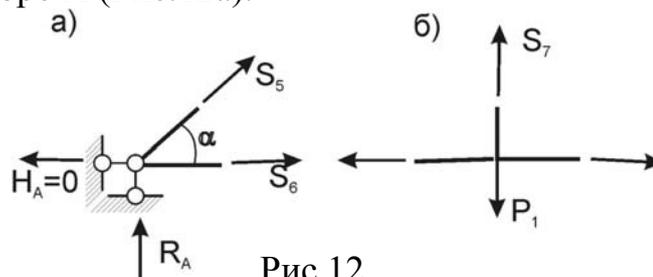


Рис.12

$$\begin{aligned} \text{Узел А:} \quad \sum Y = 0; \quad R_A + S_5 \sin \alpha = 0; \quad S_5 = -R_A / \sin \alpha. \\ \sum X = 0; \quad S_5 \cos \alpha + S_6 = 0; \quad S_6 = -S_5 \cos \alpha = R_A \cot \alpha. \end{aligned}$$

Используя третий частный случай равновесия узлов, находим $S_7 = P_1$ (Рис.12б), аналогично находятся и усилия над силами P_3 и P_5 . Далее можно найти последовательно все остальные усилия, вырезая узлы, где неизвестных усилий не более двух.

Следует отметить, что для более сложных ферм применяются и другие способы расчета ферм: способ замкнутого сечения, способ совместных сечений, способ замены стержней.

Кроме того, существует графический способ определения усилий в ферме с помощью диаграммы Кремоны-Максвелла, но с развитием численных методов и вычислительных комплексов нет особой нужды в применении таких изощренных методов, надежнее составить адекватную расчетную схему конструкции, применить какой-либо вычислительный комплекс, а лучше несколько, и уметь проверить полученный результат.

2.4. ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Какие уравнения используются для определения значений опорных реакций?
2. Чему равна горизонтальная опорная реакция горизонтальной балки при вертикальной нагрузке?
3. Каков порядок расчета многопролетной шарнирно - консольной балки?
4. Какие сооружения называются распорными? Привести примеры. Что такое трехшарнирная рама (арка)? Как определяются опорные реакции и усилия в затяжках?
5. Как проверить правильность нахождения опорных реакций?
6. Что представляют собой эпюры изгибающих моментов, поперечных и продольных сил и каждая ордината этих эпюр?
7. По каким законам изменяются изгибающий момент и поперечная сила по длине оси стержня при отсутствии распределенной нагрузки?
8. Чему равна поперечная сила в сечении стержня, в котором изгибающий момент достигает экстремального значения?
9. В какую сторону обращена выпуклость эпюры M при действии распределенной нагрузки? Привести примеры.
10. Как определить экстремальное значение изгибающего момента?
Что такое ферма? Какие усилия появляются в стержнях ферм и почему?
11. Как определяются реакции в балочной ферме?
12. Что называется моментной точкой? Привести примеры.
13. Какие элементы различают в фермах? Привести примеры.
14. Когда и как применяется способ вырезания узлов? В чем достоинства и

- недостатки его? Привести примеры.
15. Какие стержни называются нулевыми? Приведите частные случаи равновесия узлов.
16. Когда рационально находить усилия способом проекций? В чем его сущность?

3. Трехшарнирные арки

Трехшарнирной аркой называется трехшарнирная система из двух криволинейных брусьев (Рис.13). Трехшарнирные арки относятся к распорным системам, в которых вертикальные нагрузки вызывают горизонтальные опорные реакции, называемые распором.

Расстояние между опорами по горизонтали называется пролетом l , высота среднего шарнира над линией опор называется стрелой подъема f .

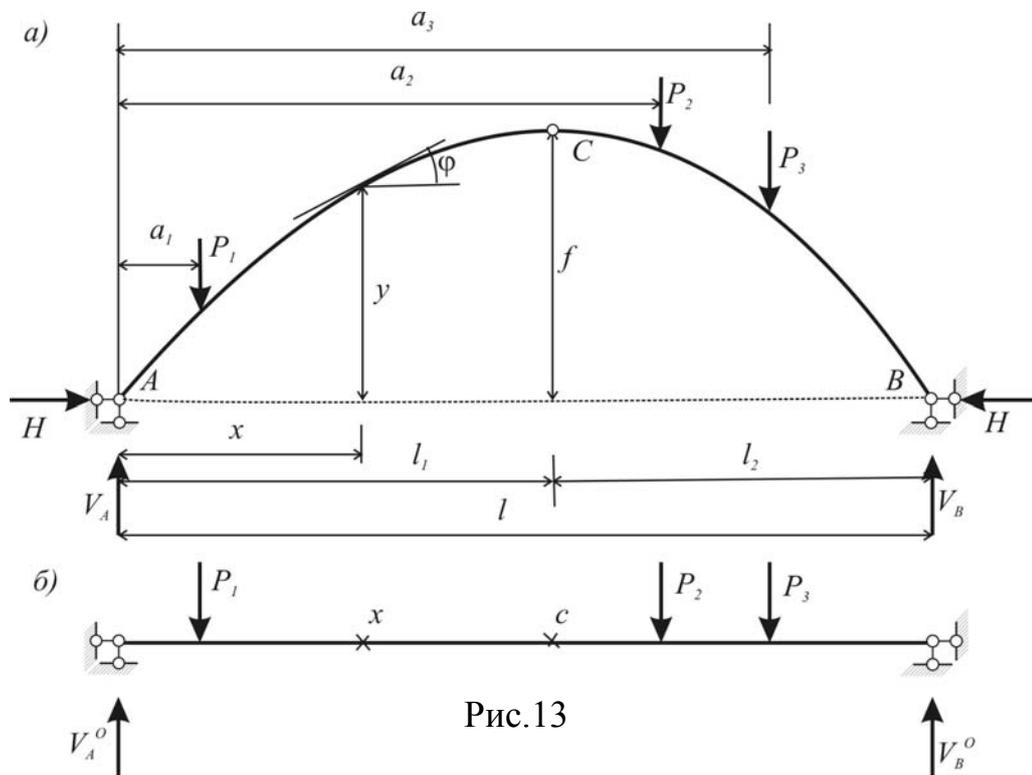


Рис.13

3.1. Определение опорных реакций

Если опоры арки находятся на одном уровне, нагрузки только вертикальные, вертикальные реакции V_A и V_B находятся точно так же, как и в простой балке такого же пролета и с такой же нагрузкой из уравнения равновесия $\sum M_A = 0$, $\sum M_B = 0$, которые дают $V_A = V_A^o$, $V_B = V_B^o$, (Рис.13 а,б).

Для определения распора $H_A = H_B = H$ (из уравнения проекций всех сил на горизонталь) составим уравнение моментов относительно среднего шарнира С:

$$\begin{aligned} \sum M_C^{лев} &= 0; \quad [V_A l_1 - P(l_1 - a_1)] - H \cdot f = 0; \\ \sum M_C^{прав} &= 0; \quad [-V_B l_2 + P_2(a_2 - l_1) + P_3(a_3 - l_1)] + H \cdot f = 0. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Заметим, что выражения в скобках – это значение изгибающего момента в сечении простой балки, нагруженной заданной нагрузкой (Рис.13б). Обозначим этот момент M_C^o . Тогда из (3.1) следует формула для определения распора:

$$H = \frac{M_C^o}{f}. \quad (3.2)$$

Далее мы покажем, что наличие распора существенно уменьшает изгибающие моменты и поперечные силы в трехшарнирной арке, что позволяет перекрывать арочными конструкциями существенно большие пролеты, чем балкой.

Если опоры арки располагаются на разных уровнях (Рис.14), то опорные реакции находятся из систем 2-х уравнений

$$\begin{cases} \sum M_A = 0 \\ \sum M_C^{прав} = 0 \end{cases} \Rightarrow V_B, H_B.$$

$$\begin{cases} \sum M_B = 0 \\ \sum M_C^{лев} = 0 \end{cases} \Rightarrow V_A, H_A.$$

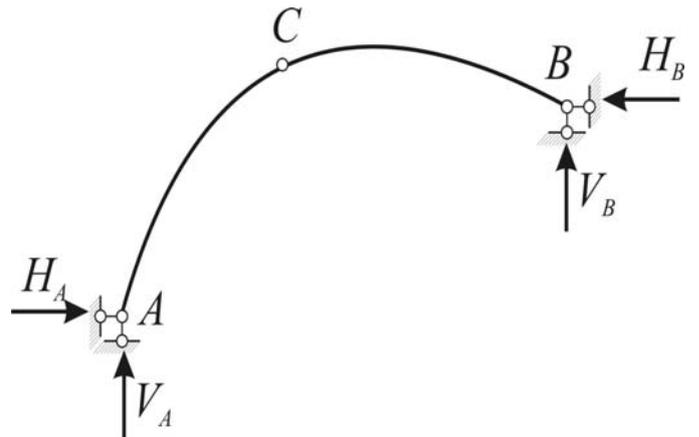


Рис.14

Проверка найденных реакций выполняется из условий $\sum X = 0, \sum Y = 0$.

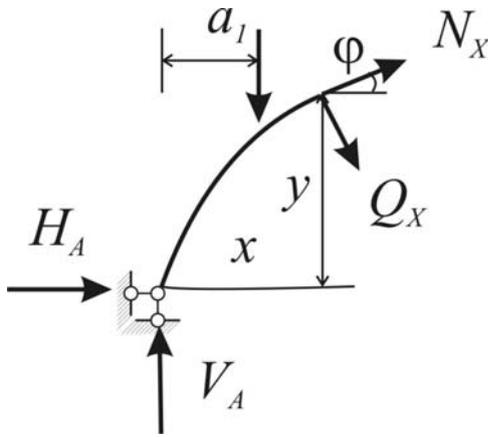
3.2. Определение усилий в сечениях арки

Рассмотри равновесие левой части арки от сечения с координатами x, y .

$$M_x = [V_A \cdot x - P_1(x - a_1)] - H \cdot y.$$

Выражение в квадратных скобках – это момент в простой балке в сечении x (Рис.13б), следовательно,

$$M_x = M_X^o - H \cdot y. \quad (3.3)$$



Проектируя все силы отсеченной части на направления Q_X и N_X , найдем

$$Q_X = (V_A - P_1) \cos \varphi - H \sin \varphi$$

$$N_X = -(V_A - P_1) \sin \varphi - H \cos \varphi$$

Здесь $V_A - P_1 = Q_X^o$ - балочная поперечная сила. Окончательно получим формулы для определения внутренних усилий в произвольном сечении арки

Рис.15

$$M_X = M_X^o - H \cdot y;$$

$$Q_X = Q_X^o \cos \varphi - H \sin \varphi; \quad (3.4)$$

$$N_X = -Q_X^o \sin \varphi - H \sin \varphi.$$

3.3. Арка с затяжкой

Структура формул (3.4) показывает, что наличие распора снижает величину моментов и поперечных сил в трехшарнирной арке по сравнению с балкой. Поэтому арочные конструкции более экономичны по сравнению с балочными и позволяют перекрывать большие пролеты, чем балкой. Но для восприятия распора требуется устройство более мощных опор, способных воспринимать опрокидывающие силы H . Для исключения этих сил, передающихся на фундамент, в уровне опор или выше помещают растянутый элемент, называемый затяжкой (Рис.16).

Если на арку действует только вертикальная нагрузка, то $H = 0$, а усилие в затяжке H_3 определяется как

$$H_3 = M_C^o / (f - t).$$

Для сечений выше затяжки усилия, очевидно, определяется по формулам (3.4) с заменой H на H_3 , y на $(y - t)$:

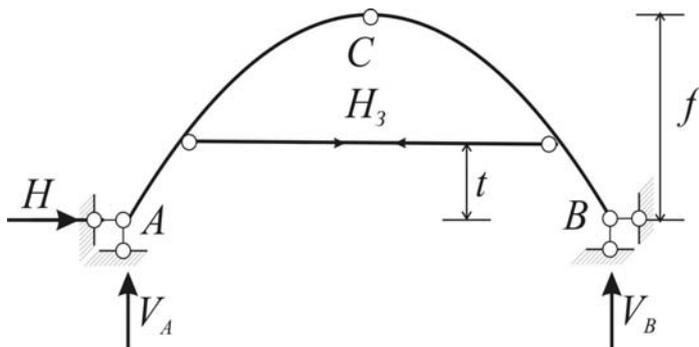


Рис.16

$$\begin{aligned}
 M_X &= M_X^o - H_3(y-t); \\
 Q_X &= Q_X^o \cos \varphi - H_3 \sin \varphi; \\
 N_X &= -Q_X^o \sin \varphi - H_3 \sin \varphi.
 \end{aligned}
 \tag{3.5}$$

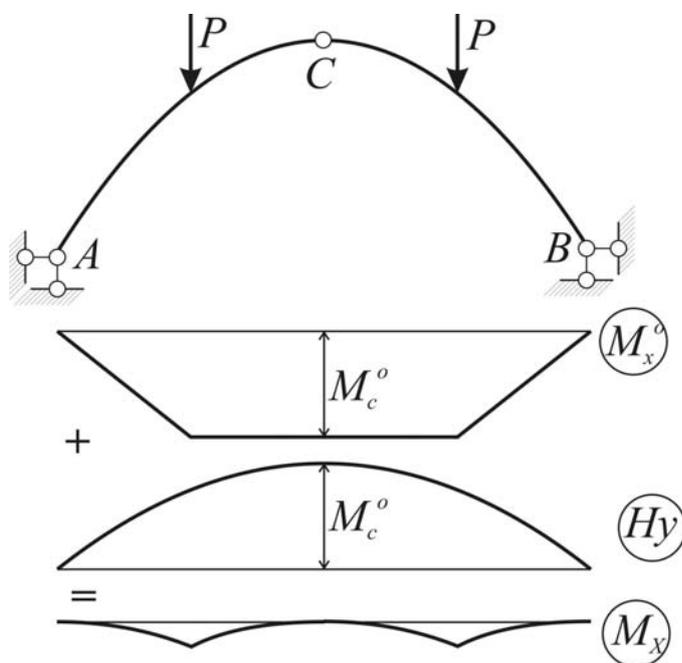
В сечениях арки, расположенных ниже затяжки, ее влияние отсутствует, поэтому надо в формулах (3.5) положить $H_3 = 0$,

$$\begin{aligned}
 M_X &= M_X^o; \\
 Q_X &= Q_X^o \cos \varphi; \\
 N_X &= -Q_X^o \sin \varphi.
 \end{aligned}
 \tag{3.6}$$

В точке крепления затяжки, действие которой можно представить как внешнюю силу по отношению к арке, в эпюре моментов должен быть перелом, а в эпюрах Q и N – скачки.

3.4. Рациональная ось трехшарнирной арки

Убедимся на конкретном примере, что в соответствии с формулами (3.4) моменты в арке уменьшаются существенно.



$M_X = M_X^o - Hy$
 Построим две эпюры – балочную эпюру M_X^o и $H \cdot y$, с ординатами посередине, равными M_C^o , т.к. $M_X^C = 0$. Суммарная арочная эпюра M_X имеет меньшие ординаты по сравнению с балочной.

Но если удалось существенно уменьшить ординаты балочной эпюры, а нельзя ли все их свести к нулю? Это легко сделать, формально приравняв значения M_X к нулю:

$$M_X = M_X^o - Hy = 0$$

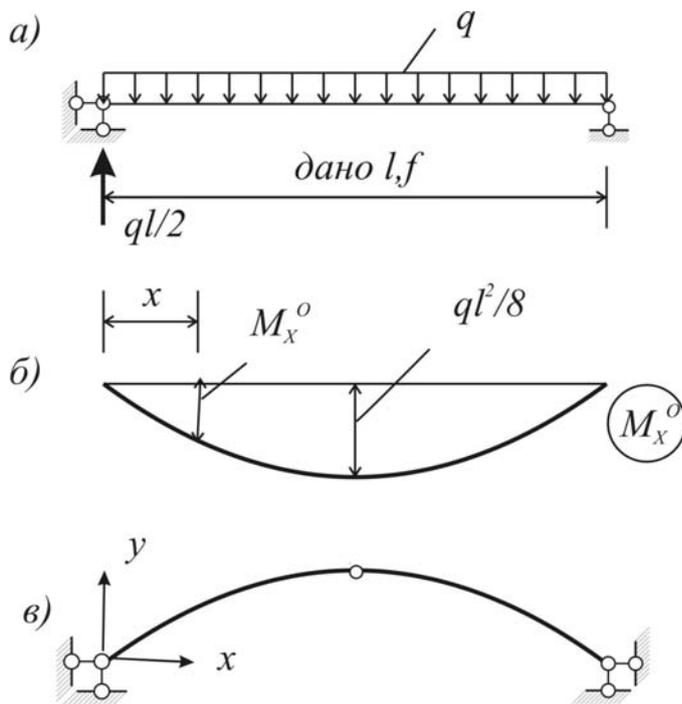
Рис.17

Отсюда следует выражение для рациональной оси арки:

$$y = M_X^o / H, \quad (3.7)$$

т.е. при заданных пролете l и стреле подъема f находим сначала число H (распор), тогда форма оси $y(x)$ будет повторять очертание балочной эпюры. Надо заметить, что ось арки должна быть повернута вверх, т.к. при вертикальной нагрузке, направленной вниз, эпюра строится со стороны растянутых нижних волокон, а арка выпуклостью направлена вверх.

Пример 1. При заданных пролете l и стреле подъема f найти рациональную ось арки при действии равномерно распределенной нагрузки (Рис.18,а):



Итак:

$$M_X = M_X^o - Hy = 0,$$

$$M_X^o = \frac{ql}{2}x - \frac{qx^2}{2};$$

$$H = \frac{M_C^o}{f} = \frac{ql^2}{8f};$$

$$y = \frac{M_X^o}{H} = \frac{4f}{l^2}(lx - x^2).$$

- это уравнение квадратной параболы.

Балочная эпюра построена на рис.18,б, полученная ось арки – на рис. 18,в.

Пример 2. Найти рациональную ось арки для нагрузки, показанной на Рис.19,а при заданном пролете l и стреле подъема $f = 3l/16$. Построим сначала эпюру M_X^o (рис.19,а). Найдем $H = \frac{M_C^o}{f} = \frac{Pl}{4} \cdot \frac{16}{3l} = \frac{4P}{3}$, тогда

$$H = \frac{M_C^o}{f} = \frac{Pl}{4} \cdot \frac{16}{3l} = \frac{4P}{3}, \text{ тогда}$$

$$y = \frac{M_X^o}{H} \text{ имеет форму } M_X^o \text{ с}$$

ординатами в средней части балки

$$y = \frac{Pl}{4} \cdot \frac{3}{4P} = \frac{3l}{16}.$$

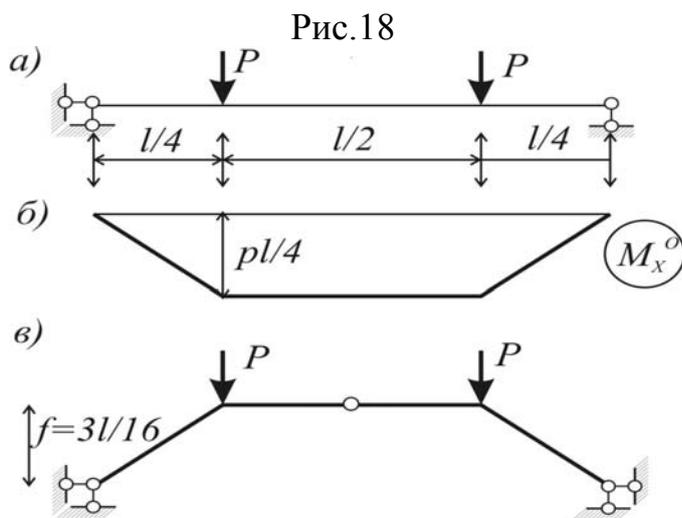


Рис.19

В данном примере арка выродилась в трехшарнирную распорную раму, но мы теперь можем утверждать, что во всех сечениях рамы $M = 0$, следовательно, и $Q = 0$, стержни рамы испытывают только осевые усилия N .

При расчете арки вручную обычно делят проекцию арки на 10-20 равных отрезков и находят усилия в полученных точках арки в табличной форме по формулам (3.4).

Координаты оси арки $y = f(x)$, угол наклона касательной к оси арки φ , а также $\sin \varphi$ и $\cos \varphi$ можно определить по следующим формулам, если начало координат расположить в опоре А, ось x направить вправо, ось y - вверх,

a) Ось – квадратная парабола

$$y = 4f(lx - x^2)/l^2; \quad \tan \varphi = y' = 4f(l - 2x)/l^2;$$

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \varphi}}; \quad \sin \varphi = \cos \varphi \cdot \tan \varphi. \quad (3.7)$$

b) Ось – окружность радиуса R .

$$y = \sqrt{R^2 - (l/2 - x)^2} - R + f; \quad R = f/2 + l^2/8f;$$

$$\sin \varphi = (l - 2x)/2R; \quad \cos \varphi = (y + R - f)/R. \quad (3.8)$$

Расчет арки начинается с построения эпюр M_X^o и Q_X^o для простой балки под действием заданной нагрузки. Затем составляется таблица, куда в качестве столбцов введем координаты точек x , вычисленные ординаты y , затем $\tan \varphi$, φ , $\sin \varphi$, $\cos \varphi$, которые вычисляются по формулам (3.7) и (3.8) или на калькуляторе. Вводятся из построенных эпюр значения M_X^o и Q_X^o и, наконец, вычисленные значения M_X , Q_X и N_X . В таблице будут 10-20 строк, соответствующих сечениям арки.

Все вычисления довольно просты, их можно автоматизировать, используя редактор Microsoft Office Excel, там организовать таблицу вычислений усилий, а после получить соответствующие эпюры в виде графиков полученных результатов. При машинном вычислении для получения плавных кривых рекомендуется взять большее количество точек на арке, (от 40 до 100), т.к. в соответствии со структурой формул (3), все эпюры M_X , Q_X и N_X криволинейны, даже если внешняя нагрузка только сосредоточенная. В случае расчета трехшарнирной арки с затяжкой при заданной высоте затяжки t необходимо определить координаты x_1 и x_2 точки крепления затяжки. Если арка параболическая, то записывается уравнение

$$t = 4f(lx - x^2)/l^2,$$

решение которого дает x_1 и x_2 . Тогда таблица вычислений дополняется двумя строчками с координатами x_1 и x_2 .

3.5. ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Как определить опорные реакции арки?
2. Что такое распор H и как он определяется?
3. Как определить опорные реакции арки при разных уровнях опор?
4. Особенности расчета арки с затяжкой.
5. Что такое рациональная ось арки и как ее получить.
6. Как ведут себя эпюры M, Q и N в точке крепления затяжки?
7. Возможны растягивающие усилия в арке?

4. Линии влияния

Задачи, приводящие к понятию линии влияния.

При расчете инженерных сооружений (мостов, кранов, подкрановых балок, эстакад и т.д.) приходится иметь дело с подвижной нагрузкой – поезд, трамвай, автомобили, крановые тележки. Часто при этом возникает задача нахождения такого положения груза, при котором искомая величина достигает наибольшего значения. Эта задача решается с помощью линии влияния.

Определение линии влияния. Смысл ее ординат.

Линией влияния какой-либо величины (опорной реакции, изгибающего момента, поперечной силы и т.д.) называется график, показывающий значение этой величины в зависимости от положения груза постоянного направления и равного единице.

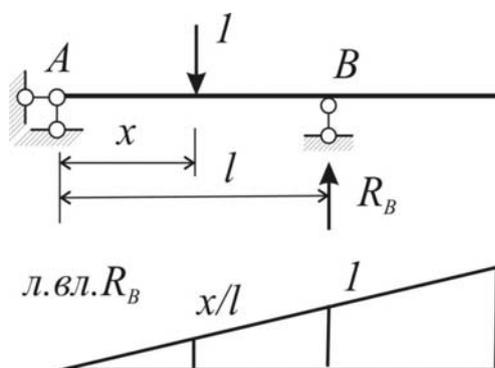


Рис.20

Задача. 1) Найти $R_B = f(x)$ и построить ее график (рис.20).

2) Найти положение груза, при котором R_B достигает наибольшего значения.

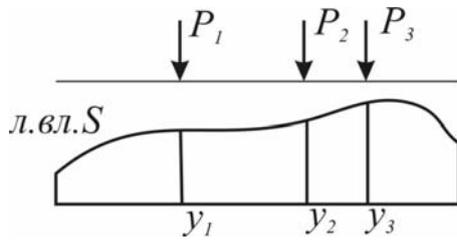
Уравнение равновесия $\sum M_A = 0$ дает $R_B = x/l$. Это уравнение прямой линии:

Наибольшее значение R_B принимает при положении груза на конце правой консоли. Ордината линии влияния выражает искомую величину (в данном случае R_B) при положении единичного груза на балке под этой ординатой линии влияния.

4.1. Определение усилий по линиям влияния

От системы сосредоточенных неподвижных сил

По линиям влияния можно также найти и усилие от неподвижной нагрузки.

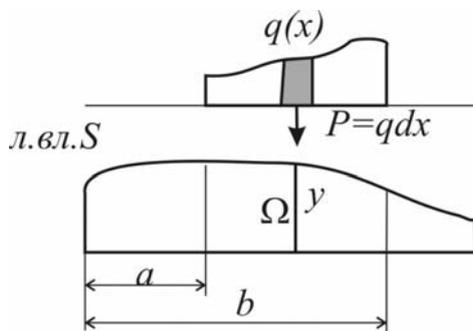


На основании принципа независимости действия сил (рис.21):

$$S = P_1 y_1 + P_2 y_2 + P_3 y_3 = \sum_{i=1}^{i=k} P_i y_i. \quad (4.1)$$

От Рис.21

неподвижной распределенной нагрузки



Заменим распределенную нагрузку силами $p = qdx$ (рис.22), используем формулу (4.1) и перейдем к пределу:

$$S = \int_a^b y q dx. \quad (4.2)$$

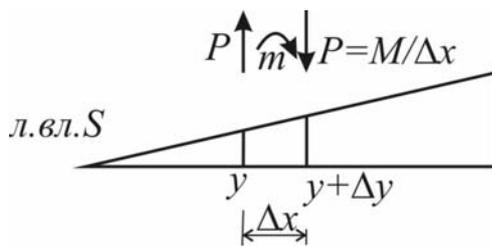
Если $q = \text{const}$, то

$$S = q \int_a^b y dx = q \Omega, \quad (4.2a)$$

где Ω - площадь линии влияния S на загруженном участке.

Рис.22

От сосредоточенного момента



Заменим момент m парой сил $P = m / dx$ и по формуле (4.1) находим

$$S = -Py + P(y + \Delta y) = P \Delta y = m \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Переходя к пределу, получим:

$$S = m \frac{dy}{dx}, \quad (4.3)$$

Рис.23

а от нескольких сосредоточенных моментов

$$S = \sum m \frac{dy}{dx} \quad (4.3a)$$

4.2. О замене заданной на прямолинейном участке линии влияния нагрузки ее равнодействующей.

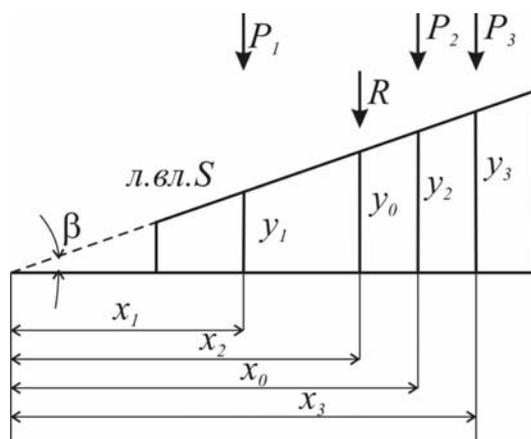


Рис.24

В соответствии с рис.24 по формуле (4.1) находим

$$S = P_1 y_1 + P_2 y_2 + P_3 y_3 =$$

$$P_1 x_1 \tan \beta + P_2 x_2 \tan \beta + P_3 x_3 \tan \beta =$$

$$\tan \beta \sum P_i x_i = \tan \beta R x_0 R y_0,$$

т.е. на прямолинейном участке линии влияния можно заданную систему сил заменить равнодействующей.

4.3. Определение положения системы связанных грузов, при котором они вызывают наибольшее усилие

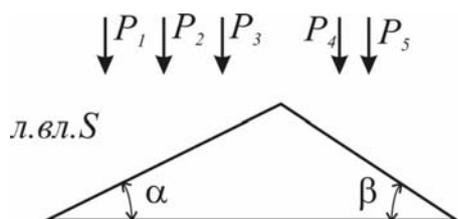


Рис.25

Пусть ни один груз не находится над вершиной треугольной линии влияния (рис.25). Тогда

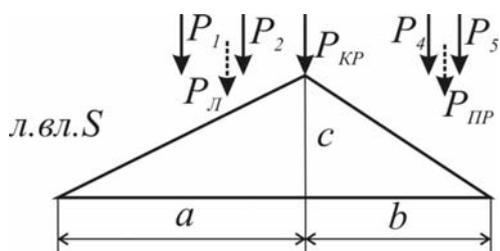
$$S = \sum P_i^l y_i^l + \sum P_i^{np}$$

Возьмем производную по x :

$$\frac{dS}{dx} = \sum P_i^l \frac{dy_i^l}{dx} + \sum P_i^{np} \frac{dy_i^{np}}{dx} = \quad (4.4)$$

$$\tan \alpha \sum P_i^l - \tan \beta \sum P_i^{np}$$

Известно (из математики), что при переходе через максимум производная меняет знак, однако в правой части (4.4) оба члена постоянны, изменение знака может произойти, если один из грузов перейдет с одного участка на другой, пройдя над вершиной. Отсюда делаем вывод: наибольшее усилие может иметь место тогда, когда один из сосредоточенных грузов находится над вершиной линии влияния. Допустим, что мы нашли положение нагрузки, при котором достигается наибольшее усилие (рис.26). Обозначая равнодействующую левых и правых сил через R_l и R_{np} , мы на основании предыдущих рассуждений (т.к. производная должна менять знак) получим два неравенства:



$$(R_l + P_{kp}) \tan \alpha - R_{np} \tan \beta > 0;$$

$$R_l \tan \alpha - (R_{np} + P_{kp}) \tan \beta < 0.$$

Или учитывая, что

Рис.26

$$\tan \alpha = \frac{c}{a}, \quad \tan \beta = \frac{c}{b}, \quad \text{получим}$$

$$\frac{R_l + P_{кр}}{a} > \frac{R_{np}}{b}; \quad \frac{R_l}{a} < \frac{R_{np} + P_{кр}}{b}. \quad (4.5)$$

Практически, искомое положение нагрузки определяется путем нескольких попыток по неравенствам (4.5), причем следует не упускать исчезновения и появления сходящихся или входящих на сооружения нагрузок.

В случае распределенной нагрузки $P_{кр} = qdx \approx 0$, поэтому неравенства (4.5) сведутся к одному неравенству

$$\frac{R_l}{a} = \frac{R_{np}}{b}.$$

Технику построения линий влияния рассмотрим на практических занятиях.

4.4.ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

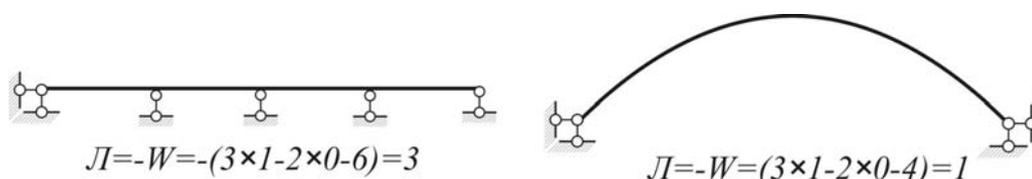
1. Что называется линией влияния (л.в.)?
2. Что представляет собой ордината линии влияния?
3. Какой вид имеют линии влияния опорных реакций в шарнирно опертой балке?
4. Приведите (с ординатами) балочные линии влияния M и Q для какого-нибудь сечения между опорами.
5. Назовите правила (последовательность), по которым строят линии влияния усилий в многопролетных шарнирно - консольных балках (способ нулевых точек).
6. Что называют грузовым поясом фермы?
7. Какие два положения груза $F = 1$ рассматривают при построении линий влияния способом вырезания узлов?
8. Какие два положения груза $F = 1$ рассматривают при построении линий влияния способом моментной точки или способом вырезания узлов?
9. Отличаются ли линии влияния опорных реакций балочной фермы от линий влияния опорных реакций балки?
10. Если для искомого усилия в стержне фермы имеется моментная точка, то что можно сказать о поведении левой и правой ветвей линии влияния?

11. Как можно строить линии влияния усилий в балочных фермах без записи и решения уравнений?

5. Статически неопределимые системы

5.1. Основные понятия

Определение. Статически неопределимой системой называется такая система, не все внутренние усилия (M, Q, N и т.д.) которой могут быть найдены из условий равновесия.



Связи условно необходимые и безусловно необходимые. Связь называется безусловно (абсолютно) необходимой, если при ее удалении система превращается в геометрически изменяемую или подвижную (горизонтальные стержни балки, вертикальные стержни арки) – Рис.27.

Общие свойства систем с лишними связями.

1. Система с лишними связями статически неопределима. Усилия в безусловно (абсолютно) необходимых связях всегда статически определимы.
2. Для статически определимой системы существует лишь одно решение, удовлетворяющее всем условиям равновесия, но для статически неопределимых систем таких решений бесконечное множество. Единственность решения для статически неопределимых систем устанавливается в результате изучения деформаций.
3. В отличие от статически определимых систем, в системе с лишними связями смещение опор, температура, неточности изготовления и сборки вызывают усилия. На рис. 28,а заданная осадка правой опоры не вызывает изгиба в статически определимой балке, нарисованной слева. На статически неопределимой балке, показанной справа, возникает изгиб и соответствующая эпюра M_C т.к. свободному перемещению балки препятствует «лишняя» связь в левой опоре. На рис. 28,б заданный нагрев не вызывает изгибающих моментов в статически определимой балке, нарисованной слева, балка изгибается свободно. На статически неопределимой балке, показанной справа, воз-

никает эпюра M_T т.к. свободному, «желаемому» перемещению балки препятствует «лишняя» связь в левой опоре.

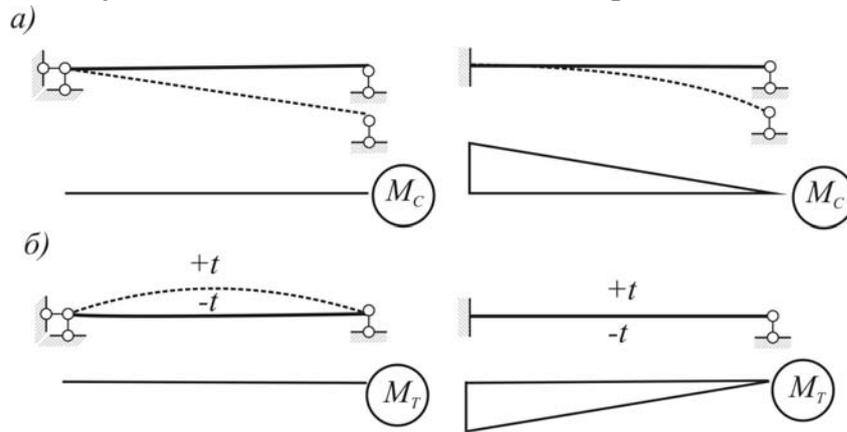


Рис.28

Существуют системы статически определимые относительно опорных реакций. Осадка опор таких систем не вызывает усилий (Рис.29).

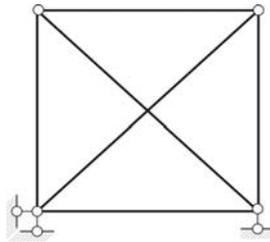
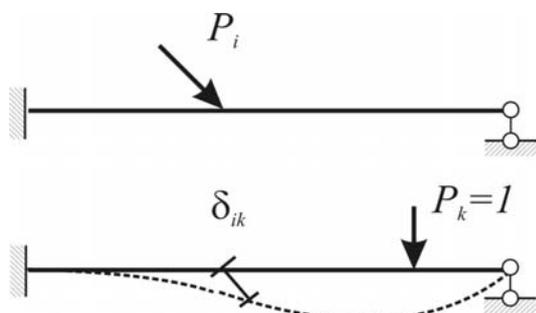


Рис.29

4. Статически неопределимые системы могут иметь начальные усилия (усилия в отсутствии внешней нагрузки). Искусственное создание начальных усилий позволяет рационально изменить эксплуатационные усилия.
5. Усилия в статически неопределимых системах зависят, вообще говоря, от формы и размеров сечений и модулей упругости.
6. Система с n лишними связями – живучи, т.к. при потере n условно необходимых связей они сохраняют геометрическую неизменяемость.

5.2. Основные теоремы об упругих линейно-деформируемых системах.

Определение. Система называется линейно-деформируемой, если ее перемещения и деформации являются однородными линейными функциями внешних сил.



$$\Delta_1 = P_1\delta_{11} + P_2\delta_{12} + \dots + P_n\delta_{1n}, \quad (5.1)$$

Где δ_{ik} - проекция перемещений точки приложения силы P_i на ее направление от силы $P_k=1$.

Рис.30

Условия линейной деформируемости:

1. Материал следует закону Гука.
2. Перемещения весьма малы.
3. Шарниры и прочие связи – идеальные (без трения).

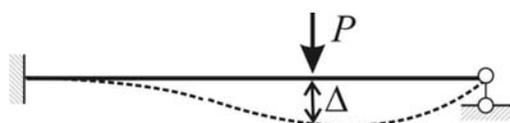
Два свойства линейно-деформируемых систем.

А) Для них справедлив принцип независимости действия сил: результат действия нескольких сил равен сумме результатов действия каждой силы в отдельности.

Б) В них не бывает остаточных деформаций.

Теорема Клапейрона (1852. Clapeyron)

При статическом действии силы на линейно-деформируемую систему работа этой силы равна половине произведения окончательного значения этой силы на окончательное значение перемещения.



$$V = \frac{1}{2} P \cdot \Delta \quad (5.2)$$

Рис.31

Процесс считается статическим, если силы инерции малы по сравнению с прочими силами; в этом случае в любое мгновение внешние силы почти уравновешиваются силами внутренними.

Доказательство:

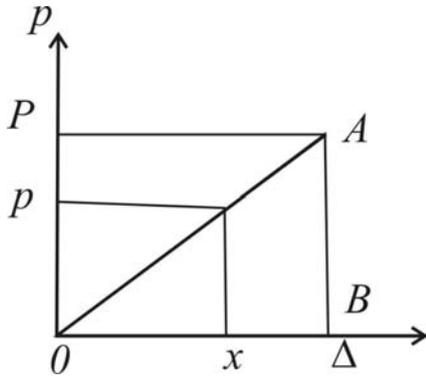


Рис.32

Вместе с ростом силы p растут и перемещения $x = \delta_{11}p$, откуда $dx = \delta_{11}dp$, поэтому

$$V = \int_0^{\Delta} p dx = \int_0^{\Delta} p \delta_{11} dp = \frac{\delta_{11} p^2}{2} \Big|_0^{\Delta} = \frac{x p}{2} \Big|_0^{\Delta} = \frac{P \Delta}{2},$$

что и требовалось доказать.

Очевидно, линейная связь между силами и перемещениями можно выразить линейным графиком, показанном на рис.32. Работа силы P на перемещении Δ равна площади треугольника OAB , или $V = P\Delta/2$.

Принцип возможных перемещений Лагранжа.

Для того чтобы упругая линейно-деформируемая система находилась в равновесии, необходимо и достаточно, чтобы работа всех внешних и внутренних сил на любом возможном перемещении была равна нулю. Этот принцип является следствием закона сохранения энергии: $V + W = 0$, здесь W - работа внутренних сил на любом возможном перемещении.

Когда система совершает возможные перемещения, действительные внешние и внутренние силы остаются неизменными. Следовательно, $V = P \cdot \Delta$.

Зависимость между работой внешних и внутренних сил.

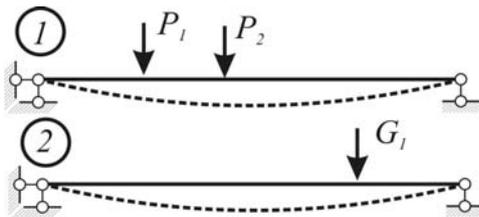


Рис.33

Составим выражение работ всех сил состояния (2) на перемещениях состояния (1) (Рис.33). Согласно Лагранжу,

$$V_{12} + W_{12} = 0, \quad (5.3)$$

где V_{12} – работа внешних сил состояния (2) на перемещениях состояния (1), а W_{12} - то же внутренних сил.

Из (5.3) следует

$$W_{12} = -V_{12},$$

Т.е. работа внутренних сил на любом возможном перемещении равна работе внешних сил с обратным знаком на том же перемещении.

Теорема Бетти о взаимности работ (1872. Betti)

Работа внешних (или внутренних) сил состояния (1) на перемещениях состояния (2) равна работе внешних (или внутренних) сил состояний (2) на перемещениях состояния (1).

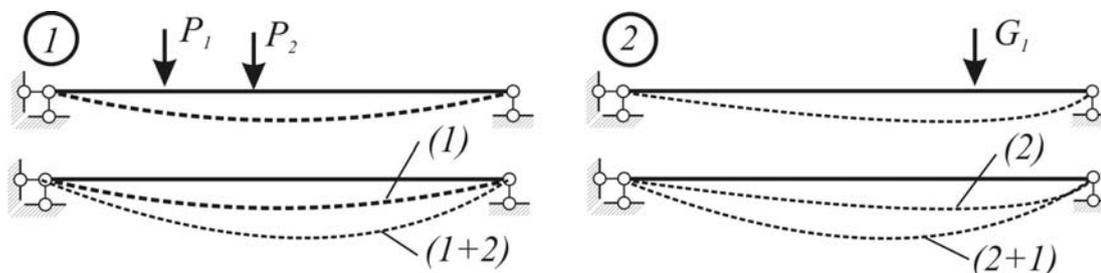


Рис.34

Доказательство:

Загружая систему сначала силами (1), а затем силами (2) получим:

$$A = A_{11} + A_{22} + A_{12}. \quad (5.4)$$

Меняя порядок загрузки, получим

$$A = A_{22} + A_{11} + A_{21}. \quad (5.5)$$

Т.к. окончательное состояние системы в обоих случаях одинаково, то одинакова и потенциальная энергия (энергия внутренних сил), следовательно и работа внешних сил одинакова. Приравнявая (5.4) и (5.5), получим:

$$A_{12} = A_{21},$$

что и требовалось доказать.

Теорема о взаимности перемещений (1864. Максвелл)

Проекция перемещения точки приложения первой силы на ее направление, вызванного второй единичной силой, равна проекции перемещения точки приложения второй силы на ее направление, вызванного первой единичной силой.

$$\delta_{12} = \delta_{21}$$

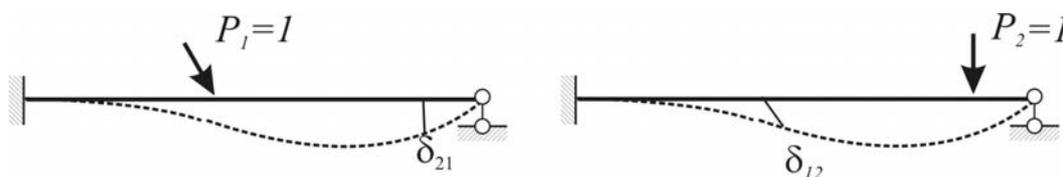


Рис.35
39

Доказательство:

По теореме Бетти: $1 \cdot \delta_{12} = 1 \cdot \delta_{21}$, что и требовалось доказать.

Теорема о взаимности реакций

Реакция первой связи, вызванная единичным перемещением второй связи, равна реакции во второй связи, вызванная единичным перемещением первой связи.

$$r_{12} = r_{21}$$

Доказательство:

По теореме Бетти: $r_{12} \cdot 1 = r_{21} \cdot 1$, что и требовалось доказать. Здесь слева – работа силы на линейном перемещении, справа – работа момента на угле поворота.

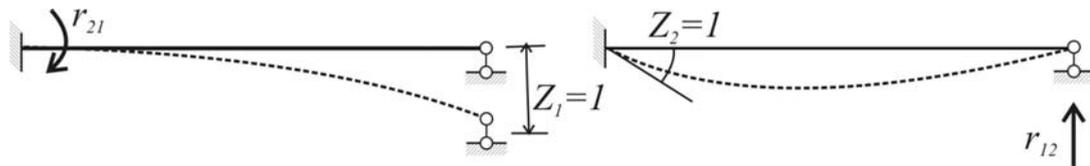


Рис.36

5.3. ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Что понимается под статическим приложением нагрузки?
2. Как определяется действительная работа внешней сосредоточенной силы F и внешнего сосредоточенного момента m ?
3. Куда переходит действительная работа внешних сил в процессе деформирования линейно-упругой системы?
4. Как формулируется принцип возможных перемещений Лагранжа?
5. Как выражается действительная работа внешних сил через внутренние усилия?
6. Приведите формулу для возможной работы внутренних сил.
7. Какой упрощенный вид принимает выражение потенциальной энергии для систем, работающих, в основном, на изгиб (балки, рамы)?
8. Как формулируется теорема Бетти о взаимности работ? Приведите доказательство этой теоремы.
9. Как формулируется теорема Максвелла о взаимности единичных перемещений. Приведите ее доказательство.

6. Общая формула перемещений плоской стержневой системы

6.1. Вывод общей формулы перемещений при силовом воздействии

В состоянии «*P*» рама находится под заданной нагрузкой (Рис.37). Требуется найти проекцию перемещения точки *D* на направление *I – I*. Приложим в точке *D* по направлению *I – I* силу $P_I = 1$. Это состояние обозначим индексом «*I*». Составим работу всех сил состояния «*I*» на перемещениях состояния «*P*».

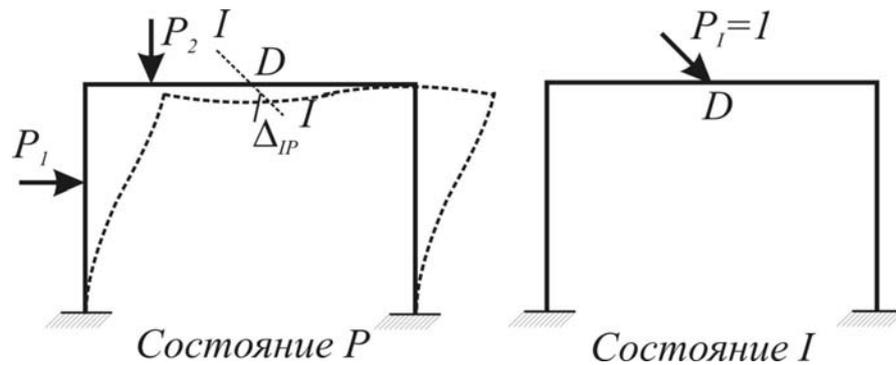


Рис.37

$$1 \cdot \Delta_{ip} + W_{ip} = 0, \quad (6.1)$$

где W_{ip} - работа внутренних сил.

Из (6.1) получим:

$$\Delta_{ip} = -W_{ip} \quad (6.2)$$

Составим работу внутренних сил состояния «*I*» на перемещениях состояния «*P*». Вырежем из упругой рамы бесконечно малый элемент длиной ds .

а) Работа продольных сил (положительных при растяжении)

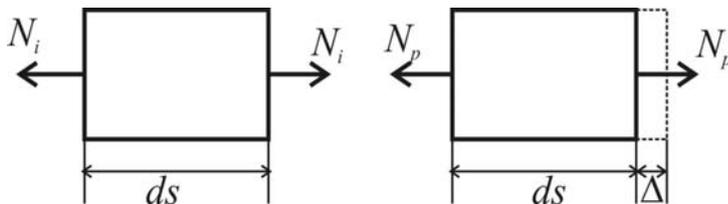


Рис.38

$$\Delta = \frac{N_p ds}{EF}, \quad (6.3)$$

где E - модуль упругости, F - площадь поперечного сечения.

$$dW'_{ip} = -N_i \Delta = -\frac{N_i N_p}{EF} ds \quad (6.4)$$

б) Работа изгибающих моментов (положительных, если растянуто нижнее волокно)

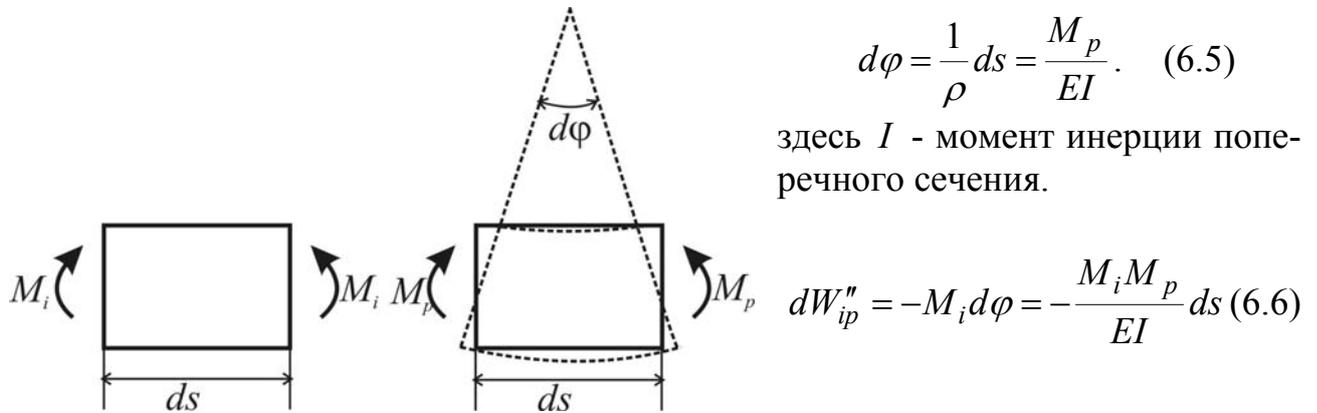


Рис.39

в) Работа поперечных сил (положительных, если они вращают элемент по часовой стрелке)

Касательные напряжения τ (формула сопротивления материалов)

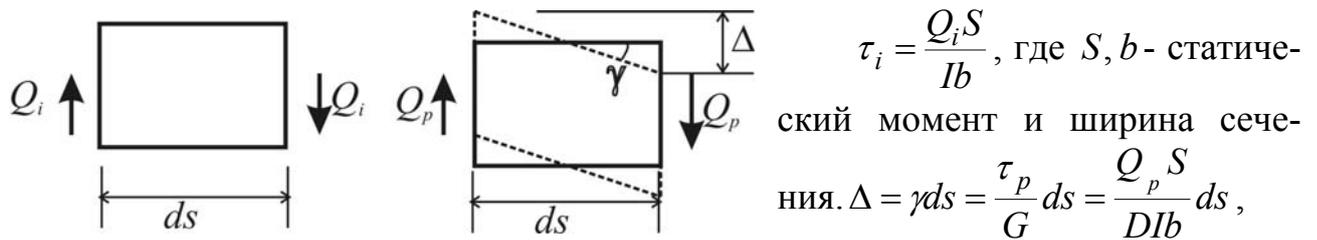


Рис.40

здесь использован закон Гука при сдвиге $\tau = \gamma G$, где G - модуль сдвига.

$$dW_{ip}''' = -\int_F \tau_i dF \cdot \Delta = -\frac{Q_i Q_p}{GF} ds \int_F \frac{FS^2}{I^2 b^2} dF = -\mu \frac{Q_i Q_p}{GF} ds, \quad (6.7)$$

Где $\mu = \frac{F}{I^2} \int_F \frac{S^2}{b^2} dF$. Для прямоугольного сечения $\mu = 1,2$, для кругового сечения $\mu = 32/27$, для двутаврового сечения $\mu = F / F_{cm}$.

Просуммировав полученные выше элементарные работы в пределах каждого стержня, а затем по всем стержням, получим работу всех внутренних сил:

$$W_{ip} = -\left[\sum \int \frac{M_i M_p}{EI} ds + \sum \int \frac{N_i N_p}{EF} ds + \sum \mu \frac{Q_i Q_p}{GF} ds \right] \quad (6.8)$$

Используя (6.8) и (6.2), получим общую формулу перемещений:

$$\Delta_{ip} = \sum \int \frac{M_i M_p}{EI} ds + \sum \int \frac{N_i N_p}{EF} ds + \sum \mu \frac{Q_i Q_p}{GF} ds \quad (6.9)$$

6.2. Упрощения общей формулы

Для балок, рам и пологих арок влияние нормальных и поперечных сил незначительно, поэтому учитывают только первый член общей формулы (6.9):

$$\Delta_{ip} = \sum \int \frac{M_i M_p}{EI} ds. \quad (6.10)$$

Для ферм, очевидно, остаётся только второй член формулы (6.9):

$$\Delta_{ip} = \sum \int \frac{N_i N_p}{EF} ds. \quad (6.11)$$

Для комбинированных систем – первый и второй члены:

$$\Delta_{ip} = \sum \int \frac{M_i M_p}{EI} ds + \sum \int \frac{N_i N_p}{EF} ds. \quad (6.12)$$

6.3. Правило «перемножения» эпюр Верещагина (1925)

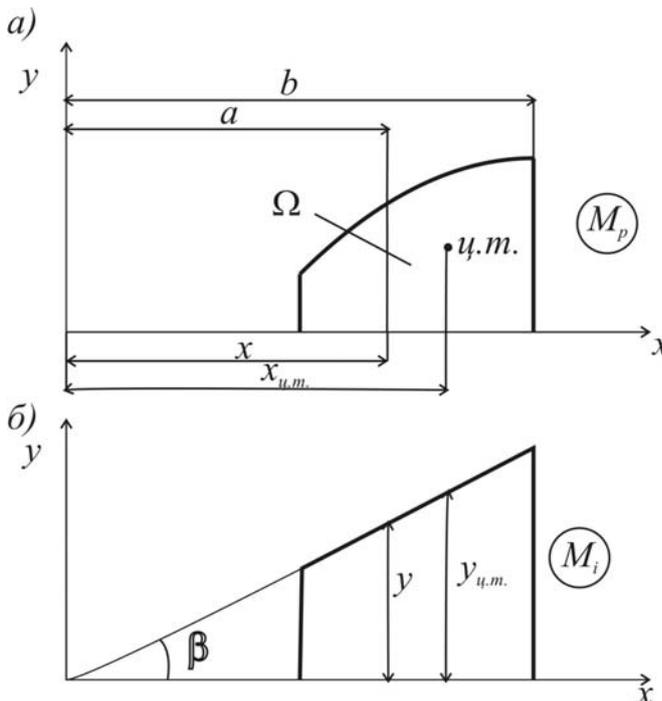


Рис.41

В формулах (6.9) – (6.12) для определения перемещений необходимо интегрировать произведение двух функций – эпюр. Эти интегралы, называемые интегралами Мора, можно вычислить аналитически, но проще воспользоваться правилом Верещагина, при условии, что хотя бы одна из умножаемых эпюр линейна.

Искомый интеграл Мора равен произведению площади криволинейной (или прямолинейной) эпюры на ординату прямолинейной эпюры, расположенную под центром тяжести криволинейной эпюры.

Доказательство.

Вычислим интеграл Мора для эюр, показанных на рис.41:

$$\int_a^b M_p M_i dx = \int_a^b M_p x \tan \beta dx = \tan \beta \int_a^b M_p x dx. \quad (6.13)$$

Интеграл в правой части выражения (5.13) – статический момент площади эюры M_p относительно оси y , равный произведению площади Ω эюры M_p на координату её центра тяжести $x_{y.m.}$ (рис.34). Тогда можно записать

$$\int_a^b M_p M_i dx = \tan \beta \Omega x_{y.m.} = \Omega y_{y.m.} \quad (6.14)$$

Искомый интеграл равен произведению площади криволинейной (или прямолинейной) эюры на расположенную под её центром тяжести ординату другой прямолинейной эюры.

Пример. Вычислить угол поворота на опоре B балки от равномерно распределенной нагрузки (рис.42).

Прикладываем на опоре B единичный момент $m=1$, строим эюры M_p и M_i , далее вычисляем перемещение сначала аналитически, затем по правилу Верещагина.

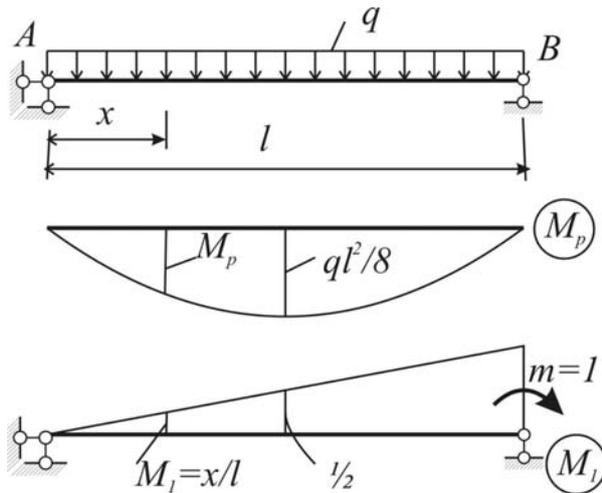


Рис.42

Решение 1.

$$\begin{aligned} \Delta_{1p} &= \int_0^l \frac{M_p M_1}{EI} ds = \frac{1}{EI} \int_0^l \left(\frac{ql}{2} x - \frac{qx^2}{2} \right) \cdot \frac{x}{l} dx = \\ &= \frac{q}{2lEI} \int_0^l (lx^2 - x^3) dx = \frac{q}{2lEI} \left(\frac{lx^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^l = \\ &= \frac{q}{2lEI \cdot 12} (4l^4 - 3l^4) = \frac{ql^3}{24EI}. \end{aligned}$$

Решение 2.

$$\Delta_{1p} = \Omega_p \cdot y_{y.m.} = \frac{2}{3} \frac{ql^2}{8} l \cdot \frac{1}{2} = \frac{ql^3}{24EI}.$$

Выбор единичного воздействия

Для нахождения перемещения в случае силового воздействия в соответствии с формулой (6.9) надо перемножить эпюры от силового воздействия на эпюры от обобщенной силы $P_i = 1$, приложенной в i -й точке по направлению искомого перемещения. В дальнейшем i -е состояние системы назовем единичным, а соответствующие эпюры будем обозначать $\bar{M}_i, \bar{Q}_i, \bar{N}_i$.

В зависимости от вида искомого перемещения в единичном состоянии принимают:

- 1) при определении линейного перемещения точки – силу $P = 1$ по направлению искомого перемещения;
- 2) при определении угла поворота сечения – сосредоточенный момент $m = 1$ в этом сечении;
- 3) при определении взаимного смещения двух точек – две противоположно направленные силы $P = 1$ по линии, соединяющие эти точки;
- 4) при определении взаимного угла поворота двух сечений – два противоположно направленных сосредоточенных момента $m = 1$, приложенных к этим сечениям.

6.4. Перемещения от теплового воздействия

Составим работу внутренних сил состояния i на перемещениях, вызванных нагревом (рис.43). Произвольная температура по высоте сечения h распределяется по линейному закону, поэтому представим произвольный нагрев как сумму симметричного и кососимметричного нагрева (рис.44). Здесь $t_{cp} = (t_1 + t_2)/2$ – средняя температура сечения, $\Delta t = t_1 - t_2$ – перепад температур в сечении.

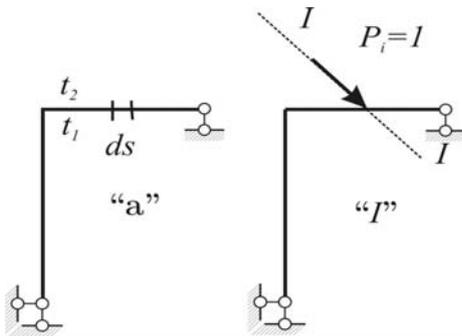


Рис.43

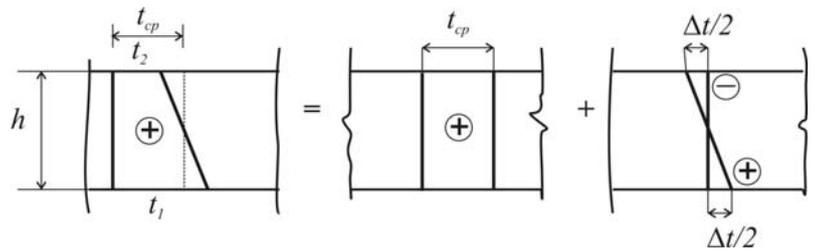


Рис.44

Составим выражение работы внутренних сил состояния “ i ” на перемещениях, вызванных нагревом (рис.45).

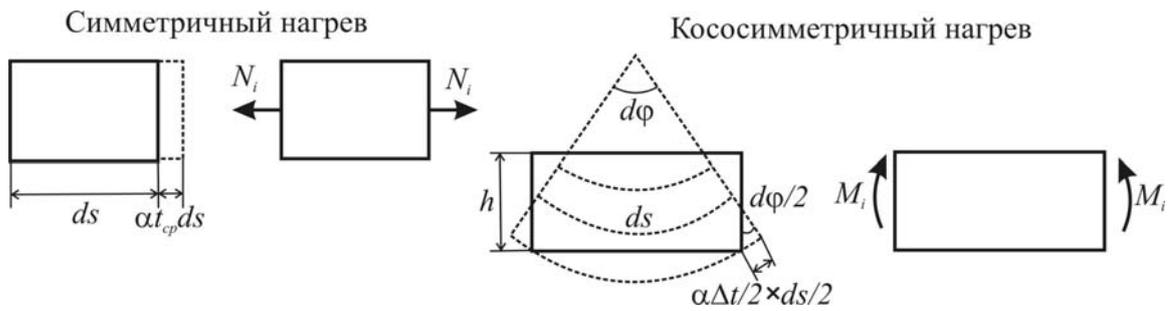


Рис.45

Для симметричного нагрева $dW_{ia}^N = -N_i \alpha t_{cp} ds$.

Для кососимметричного нагрева $dW_{ia}^M = -M_i d\varphi = -M_i \frac{\alpha \Delta t}{h} ds$ (6.15)

Здесь из (рис.45) находим $\frac{d\varphi}{2} = \frac{\frac{\alpha \Delta t}{2} \frac{ds}{2}}{\frac{h}{2}} = \frac{\alpha \Delta t}{2h}$.

Просуммировав полученные выше элементарные работы в пределах каждого стержня, а затем по всем стержням, получим работу всех внутренних сил:

$$W_{it} = -\sum \int \frac{M_i \alpha \Delta t}{h} ds - \sum \int N_i \alpha t_{cp} ds,$$

Подставляя полученное выражение в формулу (6.2), получим

$$\Delta_{it} = \sum \int \frac{M_i \alpha \Delta t}{h} ds - \sum \int N_i \alpha t_{cp} ds$$
 (6.15)

Если в пределах стержня постоянного сечения температура постоянна по длине, то выражение (6.15) можно представить в виде

$$\Delta_{it} = \sum \int \frac{\alpha \Delta t}{h} \Omega_{M_i} + \sum \alpha t_{cp} \Omega_{N_i}.$$
 (6.16)

Произведение $M_i \Delta t$ положительно, если от нагрева и силы $P=1$ элемент искривляется в одну и ту же сторону.

Произведение $N_i t_{cp}$ положительно, если от обоих воздействий элемент удлиняется или от обоих воздействий элемент укорачивается (N_i и t_{cp} одного знака).

6.5. Перемещения от осадок опор

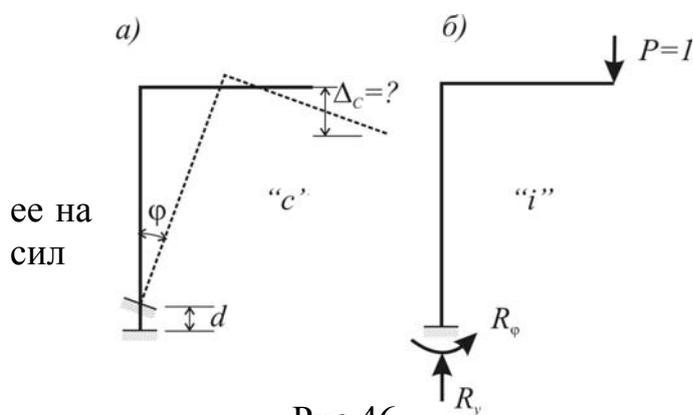


Рис.46

Составим работу всех сил состояния "i" на перемещениях состояния "c" (рис.46) и приравняем основанию теоремы Бетти работе состояния "c" на перемещениях состояния "i".

$$A_{ic} = 0;$$

$$1 \cdot \Delta_{ic} + R_y d - R_\phi \phi = 0; \quad (6.16a)$$

$$\Delta_{ic} = -(R_y d - R_\phi \phi) = -\sum R_i c_i.$$

Здесь в правой части (6.16a) нуль, т.к. в статически определимой системе осадки опор не вызывают ни внутренних усилий, ни опорных реакций. Обозначены c_i - заданные осадки опор, R_i - реакции по направлению этих осадок.

Итак, окончательно записываем

$$\Delta_{ic} = -\sum R_i c_i. \quad (6.17)$$

Произведение $R_i c_i$ положительно, если осадки и реакции направлены в одну сторону.

В заключение запишем общую формулу перемещений при произвольном воздействии (силовом, температурном и осадке опор):

$$\begin{aligned} \Delta_{ip} = & \sum \int \frac{M_i M_p}{EI} ds + \sum \int \frac{N_i N_p}{EF} ds + \sum \mu \frac{Q_i Q_p}{GF} ds + \\ & + \sum \int \frac{M_i \alpha \Delta t}{h} ds + \sum \int N_i \alpha t_{cp} ds - \sum R_i c_i \end{aligned} \quad (6.18)$$

6.6. ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Можно ли перемножить по правилу Верещагина две полигональные эпюры, не разбивая их на простейшие?
2. Как производится перемножение эпюр по формуле Симпсона? Как определяются знаки при перемножении?
3. Как записывается формула Максвелла–Мора при вычислении перемещений в балках и рамах от силового воздействия?

4. Как записывается формула Максвелла–Мора при вычислении перемещений в фермах от силового воздействия?
5. Как записывается формула Максвелла–Мора при вычислении перемещений в комбинированных системах от силового воздействия?
6. Какова последовательность действий при вычислении линейных и угловых перемещений от силовой нагрузки?
7. Какой вид принимает формула Максвелла–Мора при вычислении перемещений от кинематического воздействия и как определяются знаки?
8. Появляются ли внутренние усилия в статически определимой системе при тепловом воздействии и при осадке опор?

7. Метод сил

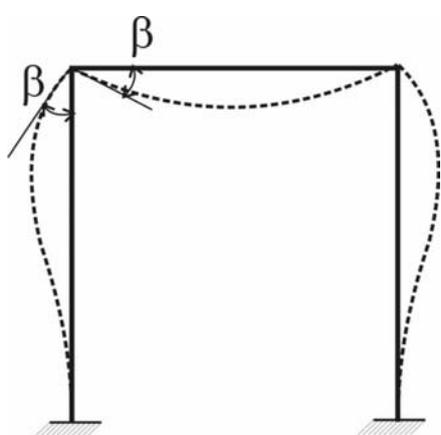


Рис.47

Вначале рассмотрим расчет рамных и балочных статически неопределимых систем.

Рамой называется стержневая система, у которой все или некоторые узловые соединения являются жесткими. Если углы между стержнями, сходящимися в данном узле, не изменяются после деформации, то такой узел является жестким. На рис.47 показана рама до и после деформации. После поворота стержней на одинаковый угол β прямой угол в жестком узле сохраняется.

7.1. Канонические уравнения метода сил (1864. Maxwell)

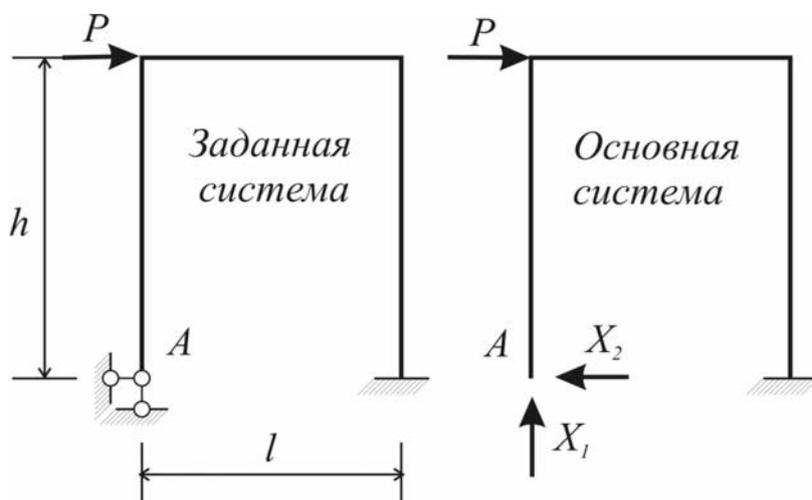


Рис.48

Требуется рассчитать заданную статически неопределимую систему, показанную на рис.48.

Отбрасывая лишние (условно необходимые) связи и заменяем их неизвестными силами X_1 и X_2 , образуем основную систему. Основная система должна быть геометрически неизменяемой и опре-

делимой. Вводя основную систему, мы вместо расчета статически неопределимой системы на заданную нагрузку P , можем рассчитать основную (статически определимую) систему на заданную нагрузку P и неизвестные силы X_1 и X_2 . Неизвестные X_i - «хранители тайн рамы» - следует разыскивать в первую очередь, т.к. если известны X_i , то нетрудно найти все внутренние усилия рамы.

Рассмотрим деформацию рамы в каждом состоянии на рис.49.

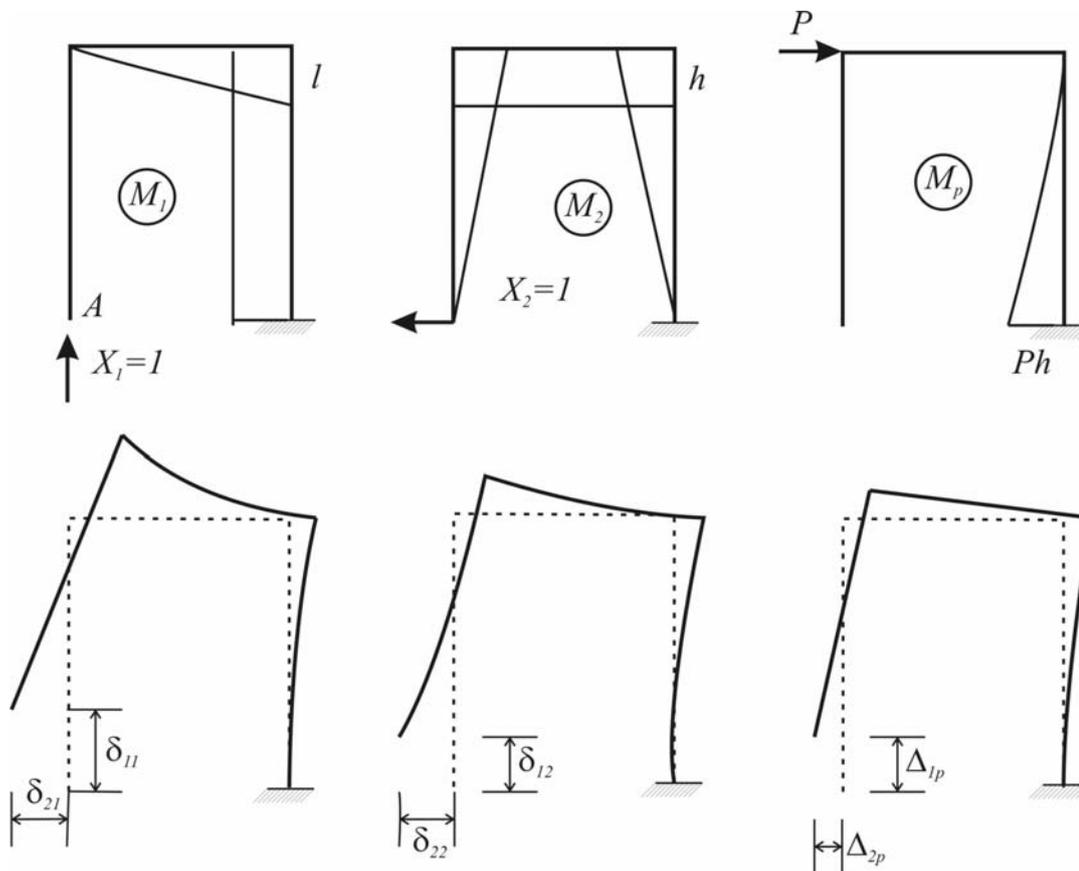


Рис.49

Поскольку полное перемещение точки A заданной системы равно нулю, то и проекции этого перемещения на вертикаль и горизонталь, вызванные заданной нагрузкой и искомыми неизвестными X_1 и X_2 также равны нулю.

$$\begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1p} &= 0; \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2p} &= 0. \end{aligned} \tag{7.1}$$

Для рамы с n неизвестными канонические уравнения имеют вид

$$\delta_{2s} = \sum \int \frac{M_2 M_s}{EI} ds = \delta_{21} + \delta_{22} + \dots + \delta_{2n}$$

Эта проверка называется построчной. Произведение i -й единичной эпюры на эпюру M_s равно сумме единичных коэффициентов i -й строки. Аналогично можно проверить правильность вычисления свободных членов

$$\sum \int \frac{M_s M_p}{EI} ds = \Delta_{1p} + \Delta_{2p} + \dots + \Delta_{np} = \sum_{i=1}^n \Delta_{ip}, \quad (7.6)$$

т.е. произведение суммарной эпюры на грузовую равно сумме грузовых коэффициентов

Аналогично можно вывести универсальное контрольное равенство:

$$\delta_{ss} = \sum \int \frac{M_s^2}{EI} ds = \delta_{11} + \delta_{22} + \dots + \delta_{nn} + 2(\delta_{12} + \dots + \delta_{1n} + \dots + \delta_{n-1,n}). \quad (7.7)$$

Результат перемножения суммарной единичной эпюры саму на себя должен быть равен сумме всех единичных коэффициентов.

7.3.. Построение окончательной эпюры M

После того, как из системы канонических уравнений (7.2) найдены неизвестные $X_1, X_2 \dots X_n$, окончательная эпюра изгибающих моментов строится по формуле:

$$M = \sum M_i X_i + M_p = M_1 X_1 + M_2 X_2 + \dots + M_p \quad (7.7)$$

Порядок построения проследим на нашем примере в предположении, что $l = h$. После вычисления коэффициентов канонической системы уравнений и ее решения нашли $X_1 = -\frac{12}{22}P$, $X_2 = \frac{5}{22}P$.

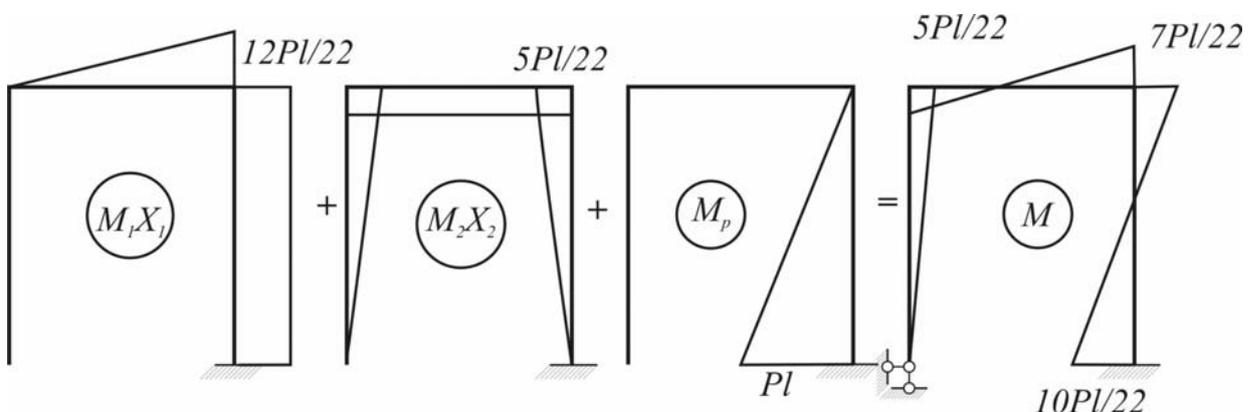


Рис.51

Если неизвестное получается со знаком « - », то соответствующая единичная эпюра перерисовывается на противоположном первоначальному волокне.

7.4. О вычислении перемещений статически неопределимой системы

При выводе формулы перемещений внешняя нагрузка и единичная сила прикладывались к заданной (одной и той же) системе.

Построение эпюры M от единичной силы в статически неопределимой системе – дело весьма трудоемкое. Надо снова рассчитывать статически неопределимую систему методом сил. Этой операции (построение M от единичной силы) можно избежать, если любую статически неопределимую систему рассматривать как статически определимую, нагруженную помимо нагрузки найденными неизвестными. В такой системе как окончательные эпюры, так и поле перемещений точно такие же, как и в заданной статически неопределимой системе. Вот к этой системе и надо прикладывать единичную силу.

Следовательно, единичное воздействие можно (и нужно!) прикладывать к любой основной системе, полученной из заданной системы отбрасыванием лишних связей.

7.5. Проверка правильности окончательной эпюры M .

- а) Статическая проверка – равновесие всех узлов рамы.
- б) Геометрическая (или кинематическая) проверка – вычисление перемещения, заведомо равного нулю.

Т.к. для нашей рамы точка A неподвижна, то:

$$\sum \int \frac{M_1 M}{EI} ds = 0; \quad \sum \int \frac{M_2 M}{EI} ds = 0. \quad (7.8)$$

В формулах (7.8) находятся вертикальное и горизонтальное перемещения точки A , которые заведомо равны нулю, т.к. здесь присутствует шарнирно – неподвижная опора.

В общем случае: т.к. смещение по направлению любой отброшенной связи заданной системы отсутствует, то интегрирование окончательной эпюры M с каждой из единичной эпюр (или суммой единичных эпюр) должно дать нуль.

7.6. Расчет балок и рам на нагрев и осадки опор

Канонические уравнения метода сил при температурных воздействиях и осадке опор отличаются от системы уравнений (6.2) лишь свободными членами:

$$\begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \dots + \delta_{1n}X_n + \Delta_{1t} &= 0; \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \dots + \delta_{2n}X_n + \Delta_{2t} &= 0; \\ \dots & \\ \delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + \dots + \delta_{nn}X_n + \Delta_{nt} &= 0. \end{aligned} \quad (7.9)$$

- при действии температуры и

$$\begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \dots + \delta_{1n}X_n + \Delta_{1c} &= 0; \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \dots + \delta_{2n}X_n + \Delta_{2c} &= 0; \\ \dots & \\ \delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + \dots + \delta_{nn}X_n + \Delta_{nc} &= 0. \end{aligned} \quad 76.10)$$

- при осадке опор.

Свободные члены в системе (6.9) представляют собой перемещения по направлению отброшенных связей в основной системе от заданного температурного воздействия, которые можно определить по формуле (5.16), если в пределах стержня постоянного сечения температура постоянна по длине:

$$\Delta_{1t} = \sum \frac{\alpha \Delta t}{h} \Omega_{M_i} + \sum \alpha t_{cp} \Omega_{N_i}. \quad (7.11)$$

Здесь Ω_{M_i} и Ω_{N_i} соответственно площади эпюр изгибающих моментов и продольных сил в основной системе от действия единичного лишнего неизвестного $X_i = 1$.

В системе уравнений (7.10) свободные члены представляют собой перемещения по направлению отброшенных связей в основной системе от заданных осадок опор, которые можно определить по формуле (5.17):

$$\Delta_{ic} = - \sum R_i c_i, \quad (7.12)$$

где c_i - заданные осадки опор; R_i - реакции опор по направлению этих осадок от действия лишнего неизвестного $X_i = 1$.

Мы уже отмечали, что в статически определимых системах температурное воздействие и осадка опор не вызывает внутренних усилий, поэтому не будет усилий и в основной статически определимой системе. Следовательно, окончательная эпюра при этих воздействиях получается алгебраическим суммированием исправленных эпюр:

$$M = \sum_{i=1}^n M_i X_i. \quad (7.13)$$

Кинематическая проверка правильности построенных эпюр заключается в нахождении заведомо нулевых перемещений по направлению лишних связей. В общем случае перемещения в статически неопределимых системах определяются по формулам (6.16) и (6.17) с добавлением членов, учитывающих изгиб в статически неопределимых системах от действия нагрева и осадок опор.

Для теплового воздействия

$$\Delta_i = \sum \int \frac{MM_i}{EI} ds + \sum \int \frac{\alpha \Delta t}{h} \Omega_{M_i} + \sum \alpha t_{cp} \Omega_{N_i} = 0. \quad (7.14)$$

Для осадок опор

$$\Delta_i = \sum \int \frac{MM_i}{EI} ds - \sum R_i c_i = 0. \quad (7.15)$$

Из полученных выражений следует формальное правило выполнения кинематических проверок:

$$\sum \int \frac{MM_i}{EI} ds = -\Delta_{it} - \text{для теплового воздействия}, \quad (7.16)$$

$$\sum \int \frac{MM_i}{EI} ds = -\Delta_{ic} - \text{для осадок опор}. \quad (7.17)$$

7.7. Определение перемещений статически неопределимых систем

Для определения перемещений статически неопределимых систем от действия нагрева или осадок опор надо в основной статически определимой системе метода сил приложить по направлению искомого перемещения единичную силу и построить эпюры \bar{M} и \bar{N} . Тогда в соответствии с формулами (7.14) и (7.15) получаем

Для теплового воздействия

$$\Delta_t = \sum \int \frac{M\bar{M}}{EI} ds + \sum \int \frac{\alpha \Delta t}{h} \Omega_{\bar{M}} + \sum \alpha t_{cp} \Omega_{\bar{N}}. \quad (7.18)$$

Для осадок опор

$$\Delta_c = \sum \int \frac{M\bar{M}}{EI} ds - \sum \bar{R} c. \quad (7.19)$$

Здесь c - заданные осадки опор, \bar{R} - реакции в единичном состоянии по направлению этих осадок.

Пример 1. Построить эпюру моментов для рамы, показанной на рис.52 от нагрева правой стойки. Находим $\Delta_t = 3t - t = 2t$, $t_{cp} = (3t + t)/2 = 2t$.

Система имеет одну лишнюю связь, поэтому система канонических уравнений вырождается в одно уравнение:

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1t} = 0; \quad \delta_{11} = \frac{1}{EI} \left(\frac{l \cdot l}{2} \frac{2}{3} l + l \cdot l \cdot l \right) = \frac{4}{3} \frac{l^3}{EI};$$

$$\Delta_{1t} = -\frac{\alpha \cdot 2t}{0,1l} l^2 - \alpha \cdot 2t \cdot l = -22\alpha t l; \quad X_1 = -\frac{\Delta_{1t}}{\delta_{11}} = \frac{33}{2} \frac{\alpha t EI}{l^2}.$$

Проверка: $\sum \int \frac{M_t M_1}{EI} ds = \alpha t EI \left(\frac{33}{2l} \frac{l}{2} \frac{2}{3} l + \frac{33}{2l} l \cdot l \right) = 22\alpha t EI = -\Delta_{1t}$.

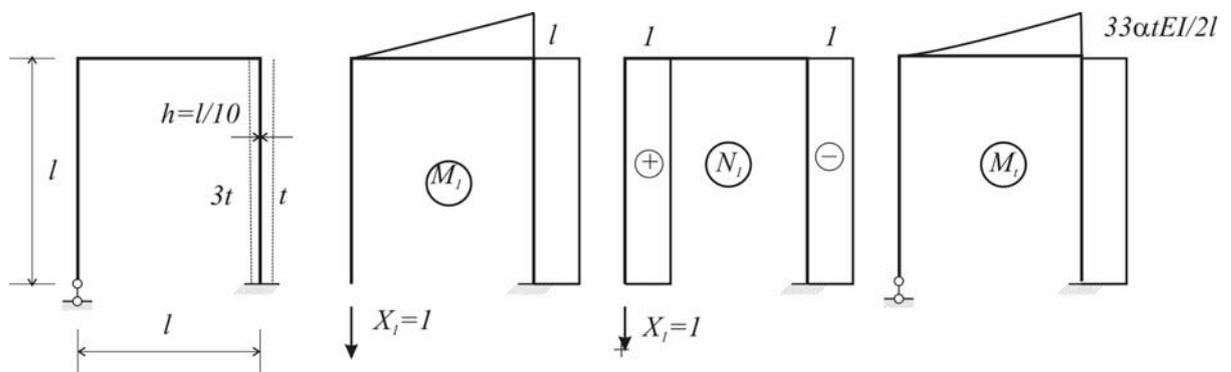


Рис.52

Эпюра M_t должна располагаться со стороны наименее нагретого волокна стержней.

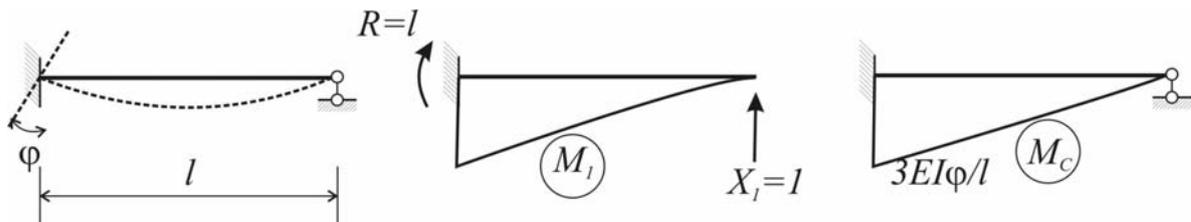


Рис.53

Пример 2. Построить эпюру моментов для балки, показанной на рис.53 от осадки опор (поворот левой опоры на угол φ).

Система имеет одну лишнюю связь, поэтому система канонических уравнений вырождается в одно уравнение:

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1c} = 0;$$

$$\delta_{11} = \frac{l^3}{3EI}; \quad \Delta_{1c} = -\sum Rc = -l\varphi; \quad X_1 = -\frac{\Delta_{1c}}{\delta_{11}} = \frac{3EI}{l^2}\varphi. \quad M_c = M_1X_1.$$

$$\text{Проверка: } \sum \int \frac{M_c M_1}{EI} ds = \frac{1}{EI} \frac{3EI\varphi}{l} \frac{l}{2} \frac{2}{3} l = l\varphi = -\Delta_{1c}.$$

7.8. Особенности применения метода сил к расчету статически неопределимых ферм и арок

При расчете любых статически неопределимых систем процедура метода сил остается неизменной – выбор основной системы, составление системы канонических уравнений, решение ее и построение эпюр внутренних усилий. Для различных систем особенность расчета заключается в вычислении перемещений – коэффициентов канонических уравнений метода сил.

а) Фермы – конструкции, в расчетной схеме которых во всех узлах принимаются идеальные шарниры. Поэтому внутренние усилия во всех стержнях – только продольные силы. Единичные и грузовые коэффициенты канонических уравнений метода сил вычисляются по формулам, полученным из (5.11) с учетом того, что при узловой нагрузке на фермы усилия во всех стержнях постоянны.

$$\delta_{ik} = \sum_{j=1}^n \frac{N_{ij} N_{kj} l_j}{EF_j}, \quad \Delta_{ip} = \sum_{j=1}^n \frac{N_{ij} N_{pj} l_j}{EF_j}, \quad (7.20)$$

где N_{ij} - усилие в j -м стержне от единичного неизвестного $X_i = 1$, N_{pj} - усилие в j -м стержне от внешней нагрузки, n - количество стержней фермы. Окончательные усилия вычисляются по формуле, аналогичной (6.7):

$$N = \sum N_i X_i + N_p = N_1 X_1 + N_2 X_2 + \dots + N_p \quad (7.21)$$

При ручном расчете обычно не строят эпюры нормальных сил, а сводят все расчеты в табличную форму.

б) Арки – конструкции, состоящие из криволинейных стержней. Если арка состоит из одного криволинейного стержня, то она может быть двухшарнирная или бесшарнирная, первая из которых один раз, а вторая – трижды статически неопределимая. Коэффициенты и свободные члены канонических уравнений метода сил должны вычисляться по общей формуле Мора:

$$\delta_{ik} = \sum \int \frac{M_i M_k}{EI} ds + \sum \int \frac{N_i N_k}{EF} ds + \sum \mu \frac{Q_i Q_k}{GF} ds; \quad (7.22)$$

$$\Delta_{ip} = \sum \int \frac{M_i M_p}{EI} ds + \sum \int \frac{N_i N_p}{EF} ds + \sum \mu \frac{Q_i Q_p}{GF} ds. \quad (7.23)$$

В силу кривизны арки все эпюры усилий в ней - и единичные и грузовые криволинейны, поэтому правило перемножения эпюр Верещагина неприменимо. Интегралы в формулах (7.22) и (7.23) вычисляются численно, пролет арки разделяется на небольшие участки и в табличной форме производятся все вычисления. Примеры расчета можно найти в рекомендованных учебных пособиях. Однако в дальнейшем мы покажем, что при достаточно мелком разбиении арок их можно рассчитывать как стержневую систему, состоящую из прямолинейных стержней. При таком подходе можно применить любой расчетный комплекс, реализующий метод конечного элемента.

7.9. Некоторые приемы упрощения расчета рам методом сил

Основная цель упрощений – обратить наибольшее число побочных коэффициентов в нуль.

1. Использование симметрии рам.

Если заданная рама симметрична, то основную систему следует выбирать также симметричной. В этом случае единичные эпюры будут симметричными, либо кососимметричными. Результат умножения симметричной эпюры M_i на кососимметричную M_k равен нулю, т.е. $\delta_{ik} = \sum \int \frac{M_i M_k}{EI} ds = 0$, поэтому система канонических уравнений метода сил разделяется на две системы. В одной системе только симметричные неизвестные, в другой – только кососимметричные.

2. Группировка неизвестных.

Два неизвестных усилия в симметричных системах, расположенных зеркально к оси симметрии, можно сгруппировать, т.е. представить одно в виде суммы, а другое в виде разности других неизвестных, тогда одна пара неизвестных будет симметричной, а другая – кососимметричной. Тогда очевидно следуют все упрощения предыдущего пункта.

3. Использование симметрии нагрузки.

Легко доказать, что при действии симметричной нагрузки на симметричную систему деформация конструкции будет симметричной, а, следовательно, все кососимметричные неизвестные усилия в лишних связях равны нулю. Наоборот, если на симметричную систему действует кососимметричная нагрузка,

то все симметричные неизвестные равны нулю. Это касается не только нагрузки, но и любого другого воздействия: изменения температуры, осадки опор и др.

Существуют и другие способы упрощения расчета – введение жестких консолей, рациональное введение шарниров, рациональное направление неизвестных и другие способы, которые мы рассматривать не будем. Со всеми этими способами можно ознакомиться в рекомендованных нами учебниках и учебных пособиях.

Все эти упрощения имеют цель уменьшить количество неизвестных и упростить ручной расчет, который раньше не имел альтернативы. Однако в настоящее время вычислительные комплексы позволяют рассчитывать конструкции с практически любым количеством неизвестных. Наша задача изучить основные принципы и методы расчета сооружений, которые помогут студенту и в дальнейшем инженеру создать адекватную расчетную схему сооружения, выбрать правильную процедуру расчета и с помощью какого-либо расчетного комплекса выполнить расчет.

Последняя и главная задача инженера – оценить полученные результаты расчета. Во второй части курса мы обратим особое внимание на эти вопросы, т.к. участвовавшие в последнее время аварии и катастрофы со строительными объектами говорит о слабой квалификации расчетчиков, использующих ЭВМ.

7.10. ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Что называется степенью статической неопределимости системы и как она связана с числом степеней свободы?
2. Чему равна степень статической неопределимости замкнутого бесшарнирного контура?
3. Назовите основные свойства статически неопределимых систем.
4. Какова основная идея метода сил?
5. Назовите основные требования, предъявляемые к основной системе.
6. Что представляют собой абсолютно необходимые и условно необходимые связи? Какие из этих связей следует удалять при образовании основной системы?
7. Какие приемы применяются при удалении лишних связей? Приведите примеры.
8. Что означают величины X_i , δ_{ik} , δ_{ii} , Δ_{ip} ?
9. Какие перемещения называют главными, побочными и какими свойствами они обладают?
10. Как вычисляют коэффициенты при неизвестных и свободные члены при расчете балок и рам?

11. Как вычисляют коэффициенты при неизвестных и свободные члены при расчете ферм?
12. Что происходит с системой канонических уравнений, если одна часть неизвестных является симметричной, а другая – кососимметричной?
13. Как производится статическая проверка окончательных эпюр M , Q , N ?
14. Как записывается система канонических уравнений метода сил при расчете на тепловое воздействие и смещение опор?
15. Как зависят усилия в статически неопределимой системе при расчете на тепловое и кинематическое воздействия от жесткостей элементов?